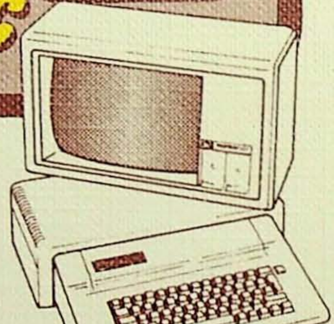
G. Daubach D. Herrmann

# MATHEMATIK AUF DEM APPLE

## II, IIe, 2c



Fertige Programme,
Anregungen und
Erläuterungen in BASIC

Programme auf Diskette erhältlich

IWT

G. Daubach D. Herrmann

# MATHEMATIK AUF DEM APPLE

## II, IIe, 2c

Fertige Programme, Anregungen und Erläuterungen in BASIC

IWT

ISBN 3-88 322-036-1
1. Auflage 1984



Printed in Western Germany

Vaterstetten bei München

Holdenrieds Druck- und Verlags-GmbH, Füssen
Umschlaggestaltung: Kaselow und Partner, München

# VORWORT

Dieser Band enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen

- Mehr-Register-Arithmetik
- Zahlentheorie
- Kombinatorik
- Algebra
- Geometrie
- Numerische Mathematik

Besonders nützlich werden Praktiker und Computerfans die hier neu vorgelegte Langzahl-Arithmetik finden, die die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen gestattet!

Zahlreiche Anwendungen finden auch die hier angegebenen kombinatorischen Prozeduren: Wer wollte nicht schon mal alle Permutationen oder Kombinationen eines Problems durchspielen? Vielfältige Unterstützung findet auch das Rechnen mit Polynomen, Matrizen und komplexen Zahlen: Neben dem komplexen Hornerschema werden insbesondere Algorithmen zur Polynomdivision und Matrizeninversion gegeben.

Anwendungsbezogen sind die Programme der Numerischen Mathematik. Hier werden Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungen gegeben, zum Eigenwertproblem von Matrizen und zur numerischen Integration und Differentiation. Alle Programme werden durch vollständige Beispiele und komplette Programmausdrucke erläutert.

Dem Verlag danken wir für die Herausgabe des Bandes und für die stets freundliche Zusammenarbeit.

Anzing, Burscheid, im Juni 1984

# INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Seite

GEOMETRIE



NUMERISCHE MATHEMATIK



ANHANG

La machine arithmetique fait des effects
qui approchent plus de la pensee
que tout ce que font des animaux

*Pascal*

Daß die niedrigste aller Geistestätigkeiten
die arithmetische ist, wird dadurch belegt,
daß sie die einzige ist, welche auch durch
eine Maschine ausgeführt werden kann

*Schopenhauer*

# EINLEITUNG

**Mathematik und Computer**

Schon zu allen Zeiten hat es bemerkenswerte numerische Leistungen gegeben.

Die berühmte Stieraufgabe, mit der Archimedes die Mathematiker von Alexandria zur Verzweiflung trieb, hatte keine kleinere Lösung als

10366482, 7460514, 7358060 und 4149387.

Ähnlich schwierig war die Lösung x = 1.3688081075 der Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

die Leonardo von Pisa, Fibonacci genannt, um 1220 auf 10 Dezimalen genau berechnete.
Van Ceulen (1539–1610) benötigte mehr als die Hälfte seines Lebens, um die Zahl pi auf 35 Dezimalen zu berechnen. Als Dank dafür hat man sie in seinen Grabstein in Leiden gemeißelt. Fermat (1601–1655) stellt in Briefen an seine armen Zeitgenossen mehrfach die Frage nach den Lösungen von

$$x^2 - 149y^2 = 1$$

deren kleinste Werte x = 25801741449 und **y** = 2113761020 sind.

In mühevoller Arbeit berechnete W. Shanks 1873 die ersten 707 Dezimalstellen von pi. Ein Großteil dieser Mühe war jedoch vergeblich, da, wie sich später herausstellte, die 528ste Stelle bereits falsch war.
An dieser Stelle muß auch der immense Rechenaufwand bedacht werden, den Ptolemaeus für die Erstellung seiner Sehnentafel Buergi und Brigg mit ihren Logarithmentafeln und Kepler mit den Rudolffinischen Tafeln hatte.
Alle diese Probleme hätten in kurzer Zeit mit Hilfe eines Rechners gelöst werden können. Es erhebt sich die Frage, ob der Computer auch prinzipiell neue Fragestellungen in Angriff nehmen kann.

1976 kam es zu dem seltenen Ereignis, daß ein mathematischer Lehrsatz Schlagzeilen in der berühmten New York Times machte. Das sensationelle Ereignis war, daß der Beweis des Vierfarbensatzes mit Hilfe von Computern gelungen war.
K. Appel und W. Haken ernteten jedoch mit ihrem Beweis bei den meisten Mathematikern nur Kopfschütteln. Ein mathematischer Beweis war traditionell etwas, was man mit Papier und Bleistift nachvollziehen konnte.

Wer aber sollte das 460-seitige Computerprogramm von Appel und Haken nachprüfen? Dazu kamen weitere 133 Seiten des Illionis Journal of Mathematics, auf denen die Autoren ihr Computerprogramm erläuterten.

Das Vier-Farben-Problem, 1852 von Francis Guthrie aufgeworfen, besagt, daß jede ebene Landkarte mit 4 Farben so gefärbt werden kann, daß je 2 benachbarte Länder verschiedenfarbig sind. Trotz erheblicher Anstrengungen widerstand die Vermutung über 120 Jahre lang den Beweisbemühungen der Mathematiker.
Die Schwierigkeit war die, alle möglichen Lagemöglichkeiten der Länder in den Griff zu bekommen. Auf Grund der Vorarbeiten von Heesch (Hannover) gelang es Appel und Haken, alle möglichen Konfigurationen in einigen tausend Fallunterscheidungen zu erfassen und vom Computer überprüfen zu lassen.

Großen Aufschwung erfuhren die Teile der Mathematik, die sich mit endlichen Mengen befassen, wie die Kombinatorik, Endliche Geometrie, Graphen- und Codierungstheorie, durch die Anwendung von Computern. Auch die Zahlentheorie erfuhr wesentliche Anregungen, so wurden z.B. sehr effektive Primzahltestverfahren entwickelt. Mit ihrer Hilfe konnte im September 1983 die z.Z. größte bekannte Primzahl

$$2^{132\,049}-1$$

mit 39751 Stellen gefunden werden. Die Rechenzeit beträgt bei den hier benützen Lucas-Lehmer-Tests nur wenige Stunden.
Konträr ist auch die Meinung der Mathematiker zu den stochastischen Primzahltests, die Primzahlen nur einer gewissen Wahrscheinlichkeit nachweisen. Beim Rabintest läßt sich die Irrtumswahrscheinlichkeit bei einigem Aufwand auf

$$10^{-60}$$

senken. Kann man dies als Beweis der Primzahleigenschaft ansehen? Oder ist nicht schon die Irrtumswahrscheinlichkeit eines Menschen größer?

Bezeichnend ist die Geschichte von Rosser, Schönfeld und Yohe (Wisconsin), die bei ihrer Arbeit über die noch unbewiesene Riemannsche Hypothese einen Rechner benützten. Als "reine" Mathematiker mißtrauten sie dem Computer und überprüften in mühseliger Kleinarbeit dessen Betriebssystem. Tatsächlich fanden sie mehrere Fehler in der internen Rechnerlogik. Diese Fehler hatte bisher noch niemand bemerkt, obwohl der Computer bereits seit mehreren Jahren in Betrieb war.

Im Gegensatz zu den Primzahltests fehlt es bei der Primzahlfaktorisierung noch an effektiven Algorithmen. So weiß man seit langer Zeit, daß eine Zahl wie

$$2^{256} + 1$$

zerlegbar ist, man kennt jedoch bis heute noch nicht ihre Primzahlzerlegung.

Die Primfaktorisierung hat große Bedeutung in der Kryptologie gewonnen. Man kann nämlich damit Verschlüsselungsverfahren konstruieren und ihr Prinzip offenlegen, ohne befürchten zu müssen, daß es "geknackt" wird (Verfahren von Rivest, Shamir und Adleman). Die Rechenzeit zur Faktorisierung einer 1000stelligen Zahl beträgt z.Z. noch 4 Mrd. Jahre. Dies hat große politische Bedeutung, falls es einmal zu einem generellen Atomwaffen-Sperrvertrag kommen sollte und die Codierung der Beobachtungssonden bekanntgegeben werden müßte.
Ein weiteres bekanntes bisher ungelöstes Problem der Zahlentheorie ist der sog. große Fermat-Satz. Er besagt, daß es keine ganzzahlige Lösung der Gleichung $\neq 0$

$$x^n + y^n = z^n$$

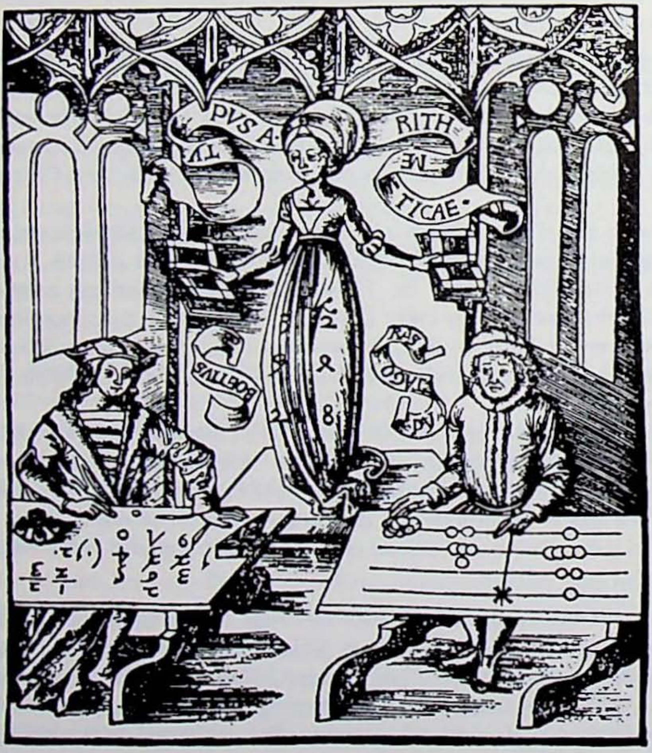
für $n > 2$ gibt. Gleichungen, von denen nur ganzzahlige Lösungen gesucht werden, nennt man Diophantisch. Vor kurzem (1983) konnte Faltings (Wuppertal) zeigen, daß Diophantische Gleichungen vom Grad $>3$ höchstens endlich viele Lösungen haben können (Mordellsche Vermutung). Durch die Reduzierung auf endlich viele Fälle scheint das Problem nun mit dem Computer greifbar.
Im Falle der sog. Catalanschen Vermutung ist dies tatsächlich der Fall. Diese besagt, daß es keine zwei Potenzen $>2$ von natürlichen Zahlen – außer 8 und 9 – gibt, deren Differenz 1 ist. Tijdemann konnte ebenfalls zeigen, daß das Problem höchstens endlich viele Lösungen hat. Durch umfangreiche Computerberechnungen glaubt er die Catalansche Vermutung mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit bewiesen zu haben. Was ist von einem solchen Beweis zu halten?
Auch viele Fragestellungen der Kombinatorik, die infolge des großen Rechenaufwandes bisher ungelöst waren, konnten seitdem beantwortet werden. Bekannt ist das Eulerische Offiziersproblem (1782): Ist es möglich, 6 verschiedene Offiziere aus 6 verschiedenen Regimentern so in einem Quadrat aufzustellen, daß in jeder Reihe und Spalte jeder Offiziersrang und jedes Regiment vertreten ist?

Eine solche Anordnung nennt man ein Paar von orthogonalen Lateinischen Quadraten. Euler vermutete, daß es keine orthogonalen Quadrate der Ordnung 6, 10, 14, usw. gäbe. Erst in den Jahren 1959/60 konnten Bose und Shrikhande nach umfangreichen Rechnungen orthogonale Lateinische Quadrate der Ordnung 10 und 14 angeben. Sie erhielten dafür den Spitznamen "the Euler Spoilers".
Verwandt mit den orthogonalen Lateinischen Quadraten sind die Blockpläne der Endlichen Geometrie. Ausgangspunkt war das Schulmädchenproblem des

Geistlichen Kirkman (1851): Kann man 15 Schulmädchen an den 7 Wochentagen so in Dreierreihen spazieren führen, daß jedes Mädchenpaar an genau einem Tag zusammentrifft?
Spezielle Blockpläne sind die sog. Steinersysteme S(t,k,v). Dabei müssen v Dinge zu je t Stück in k Reihen angeordnet werden können. Die Lösung des Schulmädchen-Problems stellt somit ein (2, 3, 15)-Steinersystem dar. Es ist im Rahmen des Buches nicht möglich, die Vielzahl der ungelösten Probleme im Zusammenhang mit den Steinersystemen aufzuzählen. Erwähnt sei, daß die kleinsten Steinersysteme, deren Existenz bisher unbewiesen sind, folgende sind:

S (4, 5, 17), S (4, 5, 21), S (4, 5, 27)

Durch umfangreiche Rechnung konnten Mendelsohn und Hung vor wenigen Jahren z.B. zeigen, daß das Steinersystem S (4, 5, 15) nicht existiert. Hier bleibt noch viel Forschungstätigkeit für künftige Mathematiker und viel Rechenarbeit für die nächste, noch schnellere Computergeration zu tun.




"Aus Margarita Philosophica des Gregor Reisch, Freiburg 1503.
Boethius mit indischen Zahlen und Pythagoras als Linienrechner vor der Arithmetica sitzend"

Es macht mich traurig, daß gebildete Leute
nicht einmal von der Existenz
meines Fachgebietes wissen

*P. R. Halmos*

Die Furcht vor der Mathematik . .
steht der Angst erheblich näher
als die Ehrfurcht

*F. Auerbach*

**Mathematik – die ungeliebte Wissenschaft**

Kein Zweifel, die Mathematik war schon immer eine unpopuläre Wissenschaft.

Besonders dem Christentum waren die heidnischen Schriften eines Euklid-Diophant und Archimedes als heidnisch suspekt. Tertullian schreibt:

> "Nach Christus brauchen wir keinerlei Wissbegier mehr, nach den Evangelien sind keinerlei Forschungen mehr nötig".

Als Folge der Verketzerung der Heiden, wurde die berühmte Mathematikerin Hypathia, Tochter des Akademievorstehers Theon, 415 von einer fanatischen Menge zu Tode gemartert. Dies, obwohl der Kirchenlehrer Synesios von Kyrene, Bischof von Ptolemais, ein Hörer ihrer Vorlesung war. Sogar die Mathematik hatte den Beigeschmack des Heidnischen. So lautete eines der Gesetze des Justinian-Kodex: "de Maleficis, mathematicis et ceteris similis" (Über Übeltätern, Mathematikern und dgl.):

> "Vollständig verboten ist die verdammenswerte Kunst der Mathematik"

Die Mathematiker werden dort mit Giftmischern, Zauberern und Sterndeutern (Veneficis, Magis, Chaldeis) in einen Topf geworfen. Noch 1614 bezeichnete der Pater Caccini in einer Predigt, die gegen Galilei gerichtet war, die Mathematik als Teufelskunst und die Mathematiker als Urheber aller Ketzereien, die man aus allen Staaten vertreiben müsse.
Er stützte sich dabei auf den heiligen Augustinus, der in De genesi ad literam geschrieben hatte:

> "Es besteht die Gefahr, daß die Mathematiker mit dem Teufel im Bunde, den Geist trüben und in die Bande der Hölle verstricken".

Als 529 Kaiser Justinian die Athener Philosophenschule schloß, erlosch eine lange Tradition mathematischer Lehre. Noch bis 485 hatte an dieser Schule Proklos gelehrt, dem wir einen grundlegenden Euklid-Kommentar verdanken.

Es ist ein ganz wesentlicher Verdienst der arabischen Kultur ab 800 die wichtigsten Werke des Apollonius, Archimedes, Heron, Euklid, Diophant, Ptolemaeus usw. in ihre Sprache übersetzt und somit der Nachwelt erhalten zu haben. Einige Übersetzungen aus dem Griechischen ins Lateinische führte auch Boethius (480 - 524) durch. Von ihm stammt auch die im Mittelalter übliche Einteilung der Künste in das Trivium (Grammatik, Rhetorik, Logik) und das Quadrivium (Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Musik).

Um eine mathematische Allgemeinbildung in Gang zu bringen, führte der Schotte Alkuin von York, im Auftrag Karls des Großen, 789 eine Schulreform durch. Sie forderte, daß neben Psalmen, Noten und Grammatik insbesondere auch der Computus gelehrt werden solle. Unter dem Computus Ecclesiaticus verstand man die Berechnung der beweglichen Kirchenfeiertage. Es war nämlich der Kirche ein Dorn im Auge, daß wegen der mangelhaften Rechenfertigkeit der Geistlichen das Osterfest zu verschiedenen Zeitpunkten gefeiert wurde. Alkuin selbst schrieb ein Rechenbuch zu Unterrichtszwecken.

Der Rechenunterricht scheint – wie heute – nicht die besondere Freude der Schüler gewesen zu sein. Ein Mönch namens Strabo der Klosterschule Reichenau schreibt 822 in sein Tagebuch:

> "Zur Abwechslung und Unterhaltung lösten wir mathematische Rätsel, welche Alkuin für den großen Karl gefertigt hatte. Viele vermochten nicht allen diesen Rechnungen zu folgen, und bevor wir zur Geometrie übergingen, traten diejenigen aus, welche sich fortan den Studien der Medizin, Rechtswissenschaft und den Künsten der Malerei und der Bildhauerei widmen wollten".

Ein Mathematiker, Gerbert von Aurillac (940 - 1003) bestieg als Sylvester II 999 den Stuhl Petri. Gerbert hatte einige Jugendjahre in Spanien verbracht und dort von den Arabern den Abakus (Rechenbrett) kennengelernt. Als Lehrer der Domschule Reims verfaßte er ein Lehrbuch zum Rechnen am Abakus. Auch an den aus den Domschulen hervorgegangenen Universitäten Bologna (1088), Paris (1150), Salerno (1173) und Montpellier (1180) spielte die Mathematik keinerlei Rolle.

Von der Universität Erfurt weiß man aus Quellen, daß die dort wirkenden Humanisten die Anstellung eines Mathematikers strikt ablehnten. Noch Anfang des 16. Jahrhunderts legten an der Universität Paris die Kandidaten für den Grad des Magisters der Künste kein Examen im Fach Geometrie ab. Sie mußten lediglich beeiden (!), Vorlesungen über die ersten 6 Bücher des Euklid gehört zu haben.
Das Risiko einer wirklichen Prüfung wollte man nicht eingehen. Bezeichnend ist, daß der Lehrsatz des Pythagoras am Ende des 1. Kapitels den Namen "Magister Matheseus" trug und somit als Weisheit letzter Schluß galt.

Welche Schwierigkeiten das Rechnen damals machte, wird aus der Rede Philipp Melanchtons vor der Universität Wittenberg (1517) deutlich.

". . . Deshalb können ihre Anfangsgründe (der Rechenkünste) gar nicht dunkel und schwer sein; sie sind im Gegenteil so durchsichtig, daß Kinder sie begreifen können, weil ja alles so natürlich vor sich geht. Die Regeln des Vielfachen und Teilens allerdings erfordern viel mehr Fleiß, aber ihr Sinn wird schon bald von den aufmerksameren eingesehen werden. Übung und Anwendung erfordert diese Fertigkeit wie alle anderen."

"Ein Vater meldet seinen Sohn bei einem Rechenmeister an. Holzschnitt von Hans Weiditz, 1535"

Die Mathematik-Kenntnisse dieser Studenten aus den Lateinschulen sind entsprechend schlecht gewesen. Der Rechenunterricht wurde in der Regel von einem externen Rechenmeister übernommen, die dazu meist eigene Rechenbücher verfaßten. Der bekannteste Rechenmeister war Adam Ries(e) in Erfurt und Annaberg.
Es dauerte noch sehr lange, bis Mathematik ein reguläres Unterrichtsfach war. So wurde noch 1805 (!) im Jahresbericht eines lutherischen Gymnasiums in Essen vermerkt, daß an der Schule kein Rechenunterricht erteilt werde. Dies sei der Fall, weil ältere Schüler den Lehrern bekannt gemacht hätten, "daß in der Stadt jetzt ein fertiger Rechenmeister sei, der eine kürzere Methode habe".

Oft wurde der Mathematik-Unterricht von nicht ausgebildeten Lehrkräften, z.B. von Theologen übernommen, die in Wartestellung auf eigene Pfarrpfründe waren. Ob es wohl diese Theologen waren, über die es in der Prüfungsordnung von 1820 für Preussen heißt: "Um das Eindringen untüchtiger Objekte in den Höheren Schulen Einhalt zu gebieten . . .". Auch in Bayern waren viele Mathematik-Lehrstühle im 19. Jahrhundert noch mit Theologen besetzt.

Daneben litt die mathematische Lehre noch unter anderen Schwierigkeiten. Mollweide in Leipzig erklärte es für unmöglich, neben der, für alle Fakultäten verbindlichen Mathesis pura, auch höhere Mathematik zu bringen, weil es dabei zuviel Schreibens an der Tafel gäbe.
Bezeichnend ist auch der Bericht von Neumann in Berlin von 1818: "Als ich mich beim Professor für Mathematik meldete, sagte dieser, ja ich habe die Vorlesung angezeigt, aber sie pflegt niemals zustande zu kommen. Ich verab-


"Darstellung der Arithmetica und Geometria aus dem Quadrivium, Holzschnitte um 1500"

redete mich mit 5 anderen, zu ihm zu gehen. Der Professor kam ins Auditorium und schrieb ununterbrochen Formeln an die Tafel und sprach dabei kein Wort, bis die Zeit um war. Am 2. Tag kamen nur noch 2 Zuhörer. Der Professor stellt sich wieder an die Tafel und zeichnete wieder ununterbrochen mathematische Formeln an diese. Am dritten Tag kam außer mir nur noch ein Zuhörer. Der Professor erschien, ging ans Katheder, wandte sich an uns und sagte: Sie sehen, meine Herren, es kommt kein Kolleg zustande".


"Darstellung der Musica und Astronomia, Holzschnitte um 1500"

# 1. Addition langer Zahlen

Jeder, der schon länger mit dem Computer rechnet, ist schon einmal an die Grenze der Rechengenauigkeit gestoßen. Während bei Großrechenanlagen meist eine Langzahl-Arithmetik hardware-mäßig implementiert ist, ist dies bei Mikrocomputern nicht der Fall.
Daher sollen im folgenden, Programme zu den Grundrechenarten für lange Zahlen angegeben werden.

Diese Programme setzen voraus, daß die eingegebenen Zahlen kommafrei und positiv sind. Dies ist keine große Einschränkung, da die Vorzeichenregeln leicht von Hand ausgeführt werden können. Kommafreie Zahlen können durch entsprechendes Ausklammern von Zehnerpotenzen erhalten werden, z.B.

$$12.3456789 = 123456789 * 10^{-7}$$
$$0.000987654 = 987654 * 10^{-9}$$

Alle Zahlen werden als Stringvariablen eingegeben und können daher bis zu 255 Stellen haben, sie werden innerhalb des Programms in Felder zerlegt. Dabei kann jedes Feld 1 bis 8 Ziffern umfassen.
Umfaßt ein Feld mehrere Ziffern, so ist zu beachten, daß der Rechner führende Nullen nicht ausdruckt. Mit Hilfe der Stringfunktion kann man auch führende Nullen ausdrucken lassen, wie es z.B. im Programm 7 geschieht.

Wird der 1. Summand durch das Feld U(I), der zweite durch V(I) dargestellt, so kann bei ziffernweiser Addition das Addieren wie folgt beschrieben werden:

```
 90  K = Ø
100  FOR I=N TO 1 STEP -1
110  W = U(I) + V(I) + K
120  W(I) = W - INT(W/1Ø) * 1Ø
130  K = INT(W/1Ø)
140  NEXT I
150  W(Ø) = K
```

Dabei ist N die Länge des größten Summanden, K der Übertrag. Die Summe ist im Feld W(I) gespeichert. Bei sehr großen Rechnungen, wie z.B. bei der Berechnung von 1ØØØ Dezimalzahlen, zerlegt man die Summanden z.B. in Fünferblöcke U(I) bzw. V(I).

Die Fünferblock-Addition läuft wie folgt ab:

```
 90 K = Ø
100 FOR I=N TO 1 STEP -1
100 W = U(I) + V(I) + K
110 K = INT (W/1Ø↑5)
120 W(I) = W - K * 10↑5
130 NEXT I
140 W(Ø) = K
```

Dabei ist N natürlich die Anzahl der Fünferblöcke.

**Zum folgenden Programm**

Als Beispiel werden im Programm die Zahlen:

783Ø412596412348

und

914Ø35812769267

addiert. Hier ergibt sich die Summe

874444843918 1615

Das hier gezeigte Programm arbeitet mit Einerblöcken, so daß auch Nullen richtig ausgegeben werden.

```
10  REM  ADDITION LANGER ZAHLEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                           "
50  PRINT " ADDITION LANGER ZAHLEN "
60  PRINT "                           "
70  NORMAL : PRINT : INVERSE
80  PRINT "1. SUMMAND ";: NORMAL
90  PRINT : PRINT
100  INPUT A$: PRINT : INVERSE
110  PRINT "2. SUMMAND ";: NORMAL
120  PRINT : PRINT
130  INPUT B$
140  PRINT
150 N =  LEN (A$):M =  LEN (B$)
160  IF N >  = M THEN 190
170 H = N:N = M:M = H
180 H$ = A$:A$ = B$:B$ = H$
190  DIM U(N),V(N),W(N)
200 :
210  IF N = M THEN 260
220  FOR I = 1 TO N - M
230 B$ = "Ø" + B$
240  NEXT I
250 :
260  REM  UMWANDLUNG IN ZAHLEN
270  FOR I = 1 TO N
280 U$ =  MID$ (A$,I,1)
290  IF U$ < "Ø" OR U$ > "9" THEN 530
300 U(I) =  VAL (U$)
310 V$ =  MID$ (B$,I,1)
320  IF V$ < "Ø" OR V$ > "9" THEN 530
330 V(I) =  VAL (V$)
340  NEXT I
350 :
360  REM  STELLENWEISE ADDITION
370 J = N:K = Ø
380 W = U(J) + V(J) + K
```

```
390 W(J) = W -  INT (W / 10) * 10
400 K =  INT (W / 10)
410 J = J - 1
420  IF J > 0 THEN 380
430 W(0) = K
440  PRINT
450  INVERSE : PRINT "SUMME = ";: NORMAL
460  PRINT : PRINT
470  PRINT " ";
480 K = 1 - K
490  FOR I = K TO N
500  PRINT W(I);
510  NEXT I
520  GOTO 570
530  PRINT : PRINT  CHR$ (7)
540  INVERSE
550  PRINT " FEHLERHAFTE EINGABE ! "
560  NORMAL
570  PRINT : PRINT
580  END
```

```
 ADDITION LANGER ZAHLEN


1. SUMMAND

 7830412596412348

2. SUMMAND

 914035842769267


SUMME =

 8744448439181615
```

## 2. Subtraktion langer Zahlen

Die Subtraktion langer Zahlen läuft als inverse Rechenoperation ähnlich wie die Addition ab. Da, wie anfangs erwähnt, auf das Rechnen mit Vorzeichen verzichtet wird, muß vorausgesetzt werden, daß der Minuend größer ist als der Subtrahend. Ist dies nicht der Fall, so vertauscht man Minuend mit Subtrahend und versieht die Differenz mit einem negativen Vorzeichen.

Wird der Minuend durch das Feld U(I), der Subtrahend durch V(I) dargestellt, so kann bei ziffernweiser Subtraktion das Subtrahieren wie folgt beschrieben werden:

```
 9Ø  K = Ø
1ØØ  FOR I=N TO 1 STEP -1
11Ø  W = U(I) - V(I) + K
12Ø  K = INT (W/1Ø)
13Ø  W(I) = W - K * 1Ø
14Ø  NEXT I
```

Dabei ist N die Länge des Minuenden, K der Übertrag. Die Differenz ist im Feld W(I) gespeichert. Übersteigt der Subtrahend den Minuend, so wird eine entsprechende Fehlermeldung ausgegeben.
Bei sehr großen Rechnungen, wie z.B. bei der Berechnung von Fünferblöcke U(I) bzw. V(I).
Die Fünferblock-Subtraktion läuft wie folgt ab:

```
 9Ø  K = Ø
1ØØ  FOR I=N TO 1 STEP -1
1ØØ  W = U(I) - V(I) - K
11Ø  IF W >= Ø THEN K = Ø: GOTO 13Ø
12Ø  K = 1: W = W + 1Ø↑5
13Ø  W(I) = W
14Ø  NEXT I
```

Dabei ist N natürlich die Anzahl der Fünferblöcke.

**Zum folgenden Programm**

Als Beispiel werden im Programm die Zahlen:

7841Ø351691Ø456

und

9541217Ø36428

subtrahiert. Es ergibt sich die Differenz

7745622998740Ø28

```
100  REM  SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN
110 :
120  HOME
130  INVERSE
140  PRINT "                              "
150  PRINT " SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN "
160  PRINT "                              "
170  NORMAL : PRINT
180  INVERSE : PRINT " MINUEND: "
190  NORMAL
200  PRINT
210  INPUT A$
220  PRINT : PRINT : INVERSE
230  PRINT " SUBTRAHEND: "
240  NORMAL : PRINT
250  INPUT B$
260  PRINT
270 :
280 N =  LEN (A$):M =  LEN (B$)
290  IF N < M THEN 560
300  DIM U(N),V(N),W(N)
310 :
320  IF N = M THEN 370
330  FOR I = 1 TO N - M
340 B$ = "Ø" + B$
350  NEXT I
360 :
370  REM  UMWANDLUNG IN ZAHLEN
380  FOR I = 1 TO N
390 U$ =  MID$ (A$,I,1)
400 U(I) =  VAL (U$)
410  IF U$ < "Ø" OR U$ > "9" THEN 690
420 V$ =  MID$ (B$,I,1)
430  IF V$ < "Ø" OR V$ > "9" THEN 690
440 V(I) =  VAL (V$)
450  NEXT I
460 :
470  REM  STELLENWEISE SUBTRAKTION
```

```
480 J = N:K = Ø
490 W = U(J) - V(J) + K
500 K =  INT (W / 10)
510 W(J) = W - K * 10
520 J = J - 1
530  IF J > Ø THEN 490
540 W(Ø) = K
550  IF K <  >  - 1 THEN 600
560  INVERSE
570  PRINT  CHR$ (7);" MINUEND KLEINER ALS SUBTRAHEND ! "
580  NORMAL : END
590 :
600  INVERSE
610  PRINT " DIFFERENZ = ": NORMAL
620  PRINT : PRINT " ";
630 K = Ø
640  IF W(K) = Ø THEN K = K + 1: GOTO 640
650  FOR I = K TO N
660  PRINT W(I);
670  NEXT I
680  GOTO 720
690  PRINT : INVERSE
700  PRINT  CHR$ (7);" UNERLAUBTE EINGABE ! "
710  NORMAL
720  PRINT : PRINT
730  END
```

SUBTRAKTION LANGER ZAHLEN

MINUEND:

784103516910456

SUBTRAHEND:

9541217036428

DIFFERENZ =

774562299874028

## 3. Multiplikation langer Zahlen

Nicht ganz so einfach wie die Addition und Subtraktion ist die Multiplikation langer Zahlen.
Wird der größere Faktor stellenweise in das Feld U(I) und der zweite in V(I) zerlegt, so läßt sich die stellenweise Multiplikation wie folgt programmieren:

```
100  FOR J = M TO 1 STEP -1
110  IF V(J) = 0 THEN W(J) = 0: GOTO 190
120  K = 0
130  FOR I=N TO 1 STEP -1
140  T = U(I) * V(J) + W(I+J) + K
150  W(I+J) = T - INT(T/10) * 10
160  K = INT(T/10)
170  NEXT I
180  W(J) = K
190  NEXT J
```

Dabei ist M die Stellenzahl des größeren Faktors, N die des kleineren Faktors. Im Feld W(I) wird die Ziffernfolge des Produkts gespeichert.
Ähnlich, wie bei der Addition und Subtraktion, könnte man auch die Multiplikation in Dreier- bzw. Viererblöcken durchführen.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet nach dem oben angegebenen Verfahren das Produkt zweier langer Zahlen.

Als 1. Beispiel wird die Zahl

999999999999999

quadriert. Es ergibt sich

99999999999999800000000000001

Im 2. Beispiel werden die beiden Primfaktoren

59649589127497217

und

5704689200685129054721

der Zahl

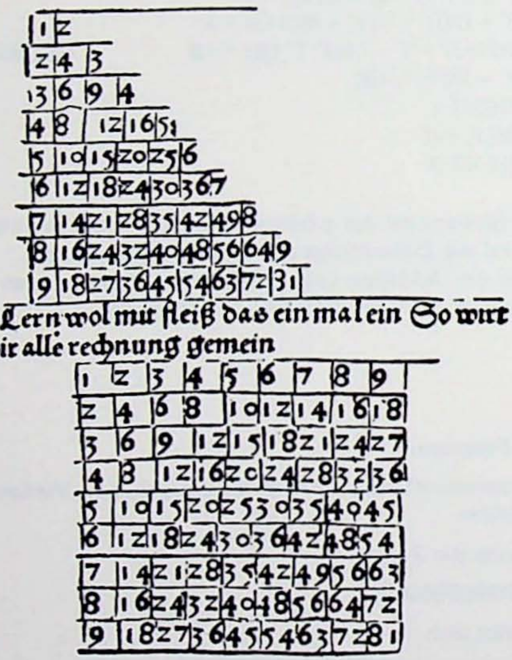
$$2^{128} + 1$$

miteinander multipliziert. Diese Primzahlfaktorisierung gelang erst 1970 den Amerikanern Morrison und Brillhart, obwohl man schon sehr lange wußte, daß diese Zahl keine Primzahl ist.

Das Programm liefert

340 82366 92093 84634 63374 60743 17682 11457

(vgl. Programmausdruck).




"Multiplikationstafel aus der Arithmetik von Johannes Widmann, Leipzig (1489)"

```
100  REM  MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN
110 :
120  HOME : INVERSE
130  PRINT "                                  "
140  PRINT " MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN "
150  PRINT "                                  "
160  NORMAL : PRINT : INVERSE
170  PRINT " 1.FAKTOR: ": NORMAL
180  PRINT
190  INPUT A$
200  PRINT : INVERSE
210  PRINT " 2.FAKTOR: ": NORMAL
220  PRINT
230  INPUT B$
240  PRINT
250 :
260  REM  GROESSEREN FAKTOR BESTIMMEN
270 N =  LEN (A$):M =  LEN (B$)
280  IF N >  = M THEN 310
290 H$ = A$:A$ = B$:B$ = H$
300 H = N:N = M:M = H
310  DIM U(N),V(M),W(M + N)
320 :
330  REM  UMWANDLUNG IN ZAHLEN
340  FOR I = 1 TO N
350 U$ =  MID$ (A$,I,1)
360  IF U$ < "0" OR U$ > "9" THEN 700
370 U(I) =  VAL (U$)
380  NEXT I
390  FOR I = 1 TO M
400 V$ =  MID$ (B$,I,1)
410  IF V$ < "0" OR V$ > "9" THEN 700
420 V(I) =  VAL (V$)
430  NEXT I
440  FOR I = M + 1 TO M + N
450 W(I) = 0
460  NEXT I
470 J = M
```

```
480 :
490  REM  STELLENWEISE MULTIPLIKATION
500  IF V(J) = Ø THEN W(J) = Ø: GOTO 58Ø
510 I = N:K = Ø
520 T = U(I) * V(J) + W(I + J) + K
530 W(I + J) = T -  INT (T / 1Ø + .ØØØØ1) * 1Ø
540 K =  INT (T / 1Ø)
550 I = I - 1
560  IF I > Ø THEN 52Ø
570 W(J) = K
580 J = J - 1
590  IF J > Ø THEN 5ØØ
600 :
610  INVERSE
620  PRINT " PRODUKT = "
630  NORMAL : PRINT : PRINT " ";
640 K = 1
650  IF W(K) = Ø THEN K = K + 1: GOTO 65Ø
660  FOR I = K TO N + M
670  PRINT W(I);
680  NEXT I
690  GOTO 73Ø
700  INVERSE
710  PRINT  CHR$ (7);" UNZULAESSIGE EINGABE ! "
720  NORMAL
730  PRINT : PRINT
740  END
```

```
MULTIPLIKATION LANGER ZAHLEN

 1.FAKTOR:

?9999999999999999

 2.FAKTOR:

?9999999999999999

 PRODUKT =

 99999999999999980000000000000001


 1.FAKTOR:

?57046892006851290054721

 2.FAKTOR:

?596495891274972170

 PRODUKT =

 34028236692093846346337460743176821145

 1.FAKTOR:
```

## 4. Division langer Zahlen

Wesentlich komplizierter als Addition und Multiplikation ist die Division langer Zahlen.
Das Programm führt eine stellenweise Division durch, entsprechend dem schriftlichen Rechnen. Zuerst wird geprüft, wie oft der Divisor in den Dividenden hineingeht. Sodann wird der Divisor mit dem entsprechenden Vielfachen multipliziert. Diese Multiplikation einer langen Zahl mit einem einstelligen Faktor wird bei Programm 5 erklärt. Das sich ergebende Produkt muß noch vom Dividenden subtrahiert werden. Der genaue Algorithmus kann dem folgenden Programm entnommen werden.

**Zum folgenden Programm**

Als Beispiel wird die schon aus dem Programm 3 bekannte Zahl

$$2^{128} + 1$$

durch den Primfaktor

59649589127497217

dividiert. Das Programm liefert den ganzzahligen Quotienten

57Ø4689200685129Ø54721

Das Programm ist so aufgebaut, daß Zahlenwerte sowohl aus DATA-Zeilen, als auch über INPUT-Anweisungen übernommen werden können. Sollen DATA-Zeilen gelesen werden, dann müssen die Programmzeilen 1ØØ und 14Ø entfallen bzw. durch eine vorgestellte REM-Anweisung unwirksam gemacht werden.

```
10  REM  DIVISION LANGER ZAHLEN
20 :
30  HOME
40  INVERSE
50  PRINT "                              "
60  PRINT " DIVISION LANGER ZAHLEN "
70  PRINT "                              "
80  NORMAL : PRINT : PRINT
90  INVERSE : PRINT " DIVIDEND ";: NORMAL
100  INPUT A$: GOTO 120
110  READ A$: PRINT A$
120  PRINT : PRINT
130  INVERSE : PRINT " DIVISOR  ";: NORMAL
140  INPUT B$: GOTO 160
150  READ B$: PRINT B$
160  PRINT : PRINT
170 :
180 M =  LEN (A$):N =  LEN (B$)
190 M = M - N
200  IF M < 0 THEN  PRINT  CHR$ (7);"EINGABEFEHLER !": END
210  DIM U(N + M),V(N),W(N),Q(M)
220 :
230  FOR I = 1 TO M + N
240 U(I) =  VAL ( MID$ (A$,I,1))
250  NEXT I
260  FOR I = 1 TO N
270 V(I) =  VAL ( MID$ (B$,I,1))
280  NEXT I
290 :
300 D =  INT (10 / (V(1) + 1)):U(0) = 0
310  IF D = 1 THEN 470
320 K = 0
330  FOR I = N + M TO 1 STEP  - 1
340 U = U(I) * D + K
350 K =  INT (U / 10)
360 U(I) = U - K * 10
370  NEXT I
380 U(0) = K
```

```
390 :
400 K = Ø
410  FOR I = N TO 1 STEP  - 1
420 V = V(I) * D + K
430 K =  INT (V / 1Ø)
440 V(I) = V - K * 1Ø
450  NEXT I
460 V(Ø) = K
470 :
480 J = Ø
490  IF U(J) = V(1) THEN Q = 9: GOTO 52Ø
500  IF V(1) = Ø THEN  PRINT  CHR$ (7);"FUEHRENDE NULL !": END
510 Q =  INT ((U(J) * 1Ø + U(J + 1)) / V(1))
520 Q1 = (U(J) * 1Ø + U(J + 1) - Q * V(1)) * 1Ø + U(J + 2)
530  IF V(2) * Q < = Q1 THEN 56Ø
540 Q = Q - 1: GOTO 52Ø
550 :
560 K = Ø
570  FOR I = N TO 1 STEP  - 1
580 W = V(I) * Q + K
590 K =  INT (W / 1Ø)
600 W(I) = W - K * 1Ø
610  NEXT I
620 W(Ø) = K
630 :
640 K = Ø:F = Ø
650  FOR I = J + N TO J STEP  - 1
660 U = U(I) - W(I - J) + K
670 K =  INT (U / 1Ø)
680 U(I) = U - K * 1Ø
690  NEXT I
700  IF K =  - 1 THEN F = 1
710 :
720 Q(J) = Q
730  IF F = Ø THEN 83Ø
740 Q(J) = Q(J) - 1
750 K = Ø
760  FOR I = J + N TO J STEP  - 1
770 U = U(I) + V(I - J) + K
780 K =  INT (U / 1Ø)
```

```
790 U(I) = U - K * 10
800  NEXT I
810 U(J - 1) = U(J - 1) + K
820 :
830 J = J + 1
840  IF J <  = M THEN 490
850 :
860 K = 0
870  FOR I = M + 1 TO M + N
880 U = U(I) + K * 10
890 U(I) =  INT (U / D)
900 K = U -  INT (U / D) * D
910  NEXT I
920 :
930 J = 0: REM  AUSGABE
940  INVERSE : PRINT " QUOTIENT ";: NORMAL
950  PRINT " ";
960  IF Q(J) = 0 THEN J = J + 1: GOTO 960
970  FOR I = J TO M
980  PRINT Q(I);
990  NEXT I: PRINT ".";
1000  FOR I = M + 1 TO N + M
1010  PRINT U(I);
1020  NEXT I
1030  PRINT : PRINT
1040  END
1050  DATA   "34028236692093846346337460743176821145 7"
1060  DATA    "5964958912749 7217"
```

DIVISION LANGER ZAHLEN

DIVIDEND 340282366920938463463374607431768211457

DIVISOR  59649589127497217

QUOTIENT  5704689200685129054721.000000000000000000

## 5. Potenzieren

Eine weitere Anwendung der Mehr-Register-Arithmetik liefert das Potenzieren, da hier sehr schnell große Zahlen auftreten.
Das Potenzieren wird im Programm als wiederholte Multiplikation durchgeführt. Eine andere Möglichkeit wäre das logarithmische Rechnen, jedoch ist die mehrfachgenaue Berechnung von Logarithmen noch aufwendiger.

Teilt man die mit B zu multiplizierende Zahl in Achterblöcke R(I), so kann die Multiplikation wie folgt durchgeführt werden:

```
100 U = 0
110 FOR I=1 TO R
120 H = R(I) * B + U
130 IF H <= -1E8 THEN U = 0: GOTO 160
140 U = INT (H/1E8)
150 H = H - U * 1E8
160 R(I) = H
170 NEXT I
```

Dabei ist R die Anzahl der Achterblöcke und U der jeweilige Überlauf.

Soll die Zahl B zur N-ten Potenz erhoben werden, so muß das angegebene Programmstück noch in die Schleife

FOR K=1 TO N . . . . . NEXT K

eingebaut werden.

Die benötigte Anzahl der Achterblöcke wird logarithmisch berechnet: Der Zehnerlogarithmus der gesuchten Potenz $B^N$ ist

N * LOG (B)/LOG (10)

Da der aufgerundete Zehnerlogarithmus einer Zahl die Stellenzahl angibt, kann daraus durch Division mit 8 die notwendige Registerzahl R berechnet werden.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet nach dem oben beschriebenen Verfahren beliebige Potenzen mit einstelliger Basis.
Soll die Basis mehrstellig sein, so wird empfohlen die Registerzahl entsprechend zu vermindern. Dazu müssen alle Achter im Programm durch 7 bzw. 6 ersetzt werden.

Als Beispiel wird die hundertste Potenz von 2 berechnet. Es ergibt sich:

1267650 60022822 94014967 032053756

(vgl. Programmausdruck).

```
100  REM  BERECHNUNG GROSSER POTENZEN
110 :
120  HOME : INVERSE
130  PRINT "                                  "
140  PRINT " BERECHNUNG GROSSER POTENZEN "
150  PRINT "                                  "
160  NORMAL : PRINT : PRINT
170  INVERSE : PRINT " BASIS    ";: NORMAL
180  INPUT B: INVERSE : PRINT : PRINT
190  PRINT " EXPONENT ";: NORMAL
200  INPUT N
210  PRINT : PRINT : INVERSE
220  PRINT " ";B;" HOCH ";N;" = "
230  NORMAL : PRINT : PRINT
240  DIM R(100)
250 :
260  REM  ZAHL DER 8-ER BLOECKE
270 R = N *  LOG (B) /  LOG (10)
280 R =  INT (R / 8) + 1
290 :
300  REM  MULTIPLIKATIONSSCHLEIFE
310 U = 0:R(1) = 1
320  FOR K = 1 TO N
330  FOR I = 1 TO R
340 H = R(I) * B + U
350  IF H <  - 1E8 THEN U = 0: GOTO 380
360 U =  INT (H / 1E8)
370 H = H - U * 1E8
380 R(I) = H
390  NEXT I
400  NEXT K
410 :
420  REM  AUSGABE
430 F$ = " "
440  FOR I = R TO 1 STEP  - 1
450 R$ =  STR$ (R(I))
460  IF  LEN (R$) < 8 THEN R$ = F$ + R$: GOTO 460
470  PRINT R$;" ";
```

```
480  IF (R - I + 1) / 4 =  INT ((R - I + 1) / 4) THEN  PRINT
490 F$ = "Ø"
5ØØ  NEXT I
51Ø  PRINT : PRINT
52Ø  END
```

```
BERECHNUNG GROSSER POTENZEN


BASIS      ?2

EXPONENT ?1ØØ

2 HOCH 1ØØ =

1267650 6ØØ22822 94Ø14967 Ø32Ø5376
```

# 6. FAKULTÄTS-BERECHNUNG

Die Berechnung der Fakultäts-Funktion liefert ebenfalls eine Anwendung der Mehr-Register-Arithmetik. Die Fakultätsfunktion n!, definiert als das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, wächst nämlich noch schneller als eine Potenzfunktion.
Die Fakultätsberechnung wird im Programm als wiederholte Multiplikation durchgeführt. Eine andere Möglichkeit wäre auch hier das logarithmische Rechnen, jedoch ist die mehrfachgenaue Berechnung von Logarithmen noch aufwendiger. Die Multiplikation erfolgt nach dem bei Programm 5 angegebenen Verfahren.
Komplizierter ist nur die Berechnung der benötigten Register. Sie erfolgt ebenfalls logarithmisch. Da der Logarithmus eines Produkts gleich der Summe der Logarithmen ist, ergibt sich log(n!) aus

```
100 FOR I=2 TO N
110 L=L+LOG(I)
120 NEXT I
```

Da die so ermittelte Zahl L, aufgerundet die Stellenzahl angibt, ist L/6 die benötigte Anzahl von Sechserblöcken. Da der Computer jedoch mit natürlichen Logarithmen rechnet, muß die Zahl zuvor über den Faktor

ln (10) = .4342945

auf den Zehnerlogarithmus umgerechnet werden.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die Fakultätsfunktion für dreistellige Zahlen in Sechserblöcken. Ist die Fakultät einer größeren Zahl gesucht, so wird aus Genauigkeitsgründen empfohlen mit Fünfer- bzw. Viererblöcken zu rechnen. Dazu müssen die im Programm auftretenden Sechsen entsprechend ersetzt werden.

Als Programmbeispiel wird

100 !

berechnet. Das Ergebnis kann dem Programmausdruck entnommen werden.

```
10  REM  FAKULTAET GROSSER ZAHLEN
20  :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                         "
50  PRINT " FAKULTAET GROSSER ZAHLEN "
60  PRINT "                         "
70  NORMAL : PRINT : PRINT : INVERSE
80  PRINT " WELCHE FAKULTAET ";: NORMAL
90  PRINT : PRINT
100  INPUT N
110  PRINT : PRINT
120  INVERSE
130  PRINT " ";N;" ! = "
140  NORMAL : PRINT
150  DIM R(100)
160  :
170  REM  ZAHL DER 6-ER BLOECKE
180 L = 1
190 R(1) = 1
200  FOR I = 2 TO N
210 L = L +  LOG (I)
220  NEXT I
230 L = L * .4342945
240 R =  INT (L / 6) + 1
250 :
260  FOR I = 2 TO R
270 R(I) = 0
280  NEXT I
290 L = 1
300  FOR I = N TO 2 STEP  - 1
310 L = L +  LOG (I) * .4342945
320 R =  INT (L / 6) + 1
330 :
340  REM  MULTIPLIKATIONSSCHLEIFE
350 U = 0
360  FOR J = 1 TO R
370 H = R(J) * I + U
380  IF H <  - 1E6 THEN U = 0: GOTO 410
```

```
390 U =  INT (H / 1E6)
400 H = H - U * 1E6
410 R(J) = H
420  NEXT J
430  NEXT I
440 :
450  REM  AUSGABE
460  FOR I = R TO 1 STEP  - 1
470  IF R(I) = 0 THEN  PRINT "000000 ";: GOTO 510
480 R$ =  STR$ (R(I))
490  IF  LEN (R$) < 6 THEN R$ = "0" + R$: GOTO 490
500  PRINT R$;" ";
510  IF (R - I + 1) / 5 =  INT ((R - I + 1) / 5) THEN  PRINT
520  NEXT I
530  PRINT : PRINT
540  END
```

```
 FAKULTAET GROSSER ZAHLEN


 WELCHE FAKULTAET

?100


 100 ! =

000093 326215 443944 152681 699238
856266 700490 715968 264381 621468
592963 895217 599993 229915 608941
463976 156518 286253 697920 827223
758251 185210 916864 000000 000000
000000 000000
```

# 7. $\pi$ AUF 1000 STELLEN

Als weitere Anwendungen der in den Programmen 1 – 4 angegebenen Mehr-Register-Arithmetik werden noch 2 mathematische Konstanten auf jeweils 1000 Stellen berechnet.
Die Kreiszahl $\pi$, definiert als

Kreisumfang/Durchmesser

ist wohl die berühmteste aller mathematischen Konstanten. Sie ist auch kulturhistorisch interessant, da die Genauigkeit, mit der ein Volk $\pi$ bestimmt hat, Auskunft über das erreichte mathematische Niveau gibt.
Während in älteren babylonischen Keilschrifttafeln die Kreiszahl zu 3 bestimmt, zeigen die 1936 in Susa ausgegrabenen Tafeln den Wert

3 7'30"

Rechnet man diesen Wert aus dem 60er-System um, so ergibt sich

$$3 + 7/60 + 30/3600$$

oder

$$3\ 1/8.$$

Bemerkenswert genau ist auch der ägyptische Wert: Der Papyrus Rhind gibt $\pi$ als das $(\frac{8}{9})^2$-fache des Durchmessers an. Dies liefert

$$3\ 13/81.$$

Die semitischen Völker rechneten mit dem Wert 3, der sich zweimal in der Bibel findet:
"Es maß 10 Ellen von einem Rand zum anderen. Eine Schnur von 30 Ellen umspannte es ringsum" (1. Könige 7,23; 2. Chronik 4,2). Archimedes (287 – 212 v. Chr.) gibt die Schranken

$$223/71 < \pi < 22/7$$

an. Ptolemäus rechnet 400 Jahre später mit dem Mittelwert aus diesen Schranken

$$3\ 17/120.$$

Um 500 n. Chr. fanden die Chinesen mit dem sehr genauen Wert

$$355/113 = 3.1415929..$$

Die Inder sahen zur gleichen Zeit

$$3927/1250 = 3.1416$$

als genauen Wert an, rechneten aber meist mit

$$\sqrt{10} = 3.1623..$$

Erst 1610 gelang van Ceulen, wie in der Einleitung erwähnt, mit 35 Dezimalstellen eine wesentliche Genauigkeitssteigerung.

In der Folgezeit wurde $\pi$ zunehmend genauer berechnet. Zuletzt gelang es E. Salamin 1976 mit Hilfe eines Großcomputers $\pi$ auf 33 Millionen Dezimalstellen zu berechnen. Natürlich hat diese Genauigkeit keinerlei praktische Bedeutung, die Dezimalbruchentwicklung wurde jedoch als idealer Zufallszahlengenerator erkannt. Eine Wiederholung von Dezimalstellen ist dabei ausgeschlossen, da man weiß, daß $\pi$ eine transzendente Zahl (d.h. nicht Nullstelle eines Polynoms) ist und somit eine nichtperiodische Entwicklung hat. Der Transzendenzbeweis erfolgte 1882 durch Lindemann.

Eine genauere Approximation, als die oben gegebenen Werte darstellen, durch eine Bruchzahl kann man mit Programm 10 erhalten. Gibt man dort $\pi$ auf 8 Dezimalstellen ein, so erhält man

251690445/80115557

Die Computerrechnungen stützen sich alle auf folgende Darstellungen von $\pi$:
Formel von Machin:

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$$

$$\pi = 16 * \arctan(1/5) - 4 * \arctan(1/70) + 4 \arctan(1/99)$$

oder die Formel von Gauß

$$\pi = 48 \arctan(1/18) + 32 \arctan(1/57) - 20 \arctan(1/239).$$

Die Reihenentwicklung des arctan

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \ldots + \ldots$$

gültig für $|x| < 1$ konvergiert umso schneller, je kleiner x ist. Insofern wäre die Gaußsche Formel vorzuziehen, jedoch muß die Reihenentwicklung dreimal ausgewertet werden. Daher benützt man meist die Formel von Machin.

Die ungeraden Potenzen der Reihenentwicklung erhält man aus der 1. Potenz durch fortgesetztes Multiplizieren mit dem Quadrat von x bzw. durch Division durch das Quadrat des Nenners.
Diese Division einer langen Zahl mit den Stellen U(I) durch die kurze Zahl D kann mit Hilfe von folgendem Programmstück durchgeführt werden:

```
100 K = 0
110 FOR I=1 TO N
120 U = U(I) + 10 * K
130 U(I) = INT(U/D)
140 K = U - INT(U/D) * D
150 NEXT I
```

Dabei ist N die Stellenzahl und K der jeweilige Übertrag. Bemerkenswert ist, daß die Zahl $\pi$ auch zweimal als Ergebnis eines Zufallsversuchs auftritt.

Das eine ist das berühmte Nadelproblem von Buffon. Dabei wird eine Nadel der Länge l zufällig auf ein Parallelgitter vom Abstand d geworfen ($l<d$). Die Nadel trifft eine Parallele mit der Wahrscheinlichkeit

$$2l/\pi d.$$

Ein zweites Ergebnis stammt von R. Chartres: Er zeigte 1904, daß zwei zufällig ausgewählte natürliche Zahlen mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6}{\pi^2}$$

teilerfremd sind.

**Zum folgenden Programm**

Es wird darin die Zahl $\pi$ nach der Formel von Machin berechnet. Die Division durch 25 bzw. durch $239^2$ werden mit Hilfe des angegebenen Verfahrens durchgeführt. Der sich ergebende Reihenterm wird entsprechend seinem Vorzeichen addiert bzw. subtrahiert.
Die Ausgabe erfolgt in Dreierblöcken.

Mit Hilfe des hier gegebenen Programms kann $\pi$ auf beliebig viele Stellen berechnet werden. Dazu muß die Variable N in Zeile 11Ø auf 1/3 der gewünschten Stellenzahl gesetzt werden. Es ist ratsam N noch aufzurunden, damit nicht das Ergebnis durch einen Rundungsfehler verfälscht wird.

Die Laufzeit des Programms beträgt mehrere Stunden, so daß Sie entsprechende Geduld aufbringen sollten. Während des Programmlaufes erscheint auf dem Bildschirm eine Countdown-Anzeige, die über den Fortschritt der Rechnung informiert.

Die vom Programm berechneten Stellen können dem Programmausdruck entnommen werden.

```
10  REM  PI AUF 1000 STELLEN
20  HOME
30  INVERSE
40  PRINT "                          "
50  PRINT " PI AUF 1000 STELLEN "
60  PRINT "                          "
70  NORMAL
80  PRINT : PRINT
90  PRINT "AUSGABE AUF <B>ILDSCHIRM"
100  INPUT "        ODER <D>RUCKER    ?";P$
110  PRINT : PRINT
120  PRINT "BERECHNUNG LAEUFT"
130 N = 334
140 ZZ = N * 3
150 T = 1000: DIM R%(N,2),K(2)
160 K(1) = 25:K(2) = 239 ^ 2
170  FOR P = 1 TO 2: GOSUB 680
180  GOSUB 770:A = 1:D1 = E: GOSUB 420
190  IF V > 0 THEN  GOSUB 520: GOTO 210
200  GOSUB 600
210 E = E + 2:V =  - V
220 A = 0:D1 = K(P): GOSUB 420
230  HTAB 20: VTAB 10: PRINT ZZ;"    ";
240 ZZ = ZZ - 1
250  IF Z THEN 180
260  NEXT P
270  IF P$ = "D" THEN  PR# 1: GOTO 320
280  PRINT : PRINT  CHR$ (7); CHR$ (7)
290  PRINT "RETURN FUER AUSGABE";
300  INPUT W$
310  HOME
320  PRINT : PRINT "PI = ";
330  PRINT  STR$ (R%(0,2))"."
340  FOR I = 1 TO N
350  IF (I - 1) / 9 =  INT ((I - 1) / 9) THEN  PRINT
360 X$ =  STR$ (R%(I,2))
370  PRINT  RIGHT$ ("00" + X$,3)" ";
380  NEXT I
390  PRINT
400  PR# 0
410  END
420 R = 0:Z = 0
```

```
430  FOR I = Ø TO N
440 D = R * T + R%(I,A)
450 Q = D / D1
460 R = D - D1 *  INT (Q)
470 Z = Z OR Q
480 R%(I,A) = Q
490  NEXT I
500 R%(N,A) = Q = .5
510  RETURN
520 C = Ø
530  FOR I = N TO Ø STEP  - 1
540 S = R%(I,2) + R%(I,1) + C
550 C = Ø
560  IF S >  = T THEN S = S - T:C = 1
570 R%(I,2) = S
580  NEXT I
590  RETURN
600 L = Ø
610  FOR I = N TO Ø STEP  - 1
620 D2 = R%(I,2) - R%(I,1) - L
630 L = Ø
640  IF D2 < Ø THEN D2 = D2 + T:L = 1
650 R%(I,2) = D2
660  NEXT I
670  RETURN
680  FOR I = Ø TO N
690 R%(I,Ø) = Ø: IF P = 1 THEN R%(I,2) = Ø
700  NEXT I
710 R%(Ø,Ø) = 16 / P ^ 2
720 D1 = 234 * P - 229
730 A = Ø
740  GOSUB 420
750 E = 1:V = 3 - 2 * P
760  RETURN
770  FOR I = Ø TO N
780 R%(I,1) = R%(I,Ø)
790  NEXT I
800  RETURN
```

PI = 3.
141 592 653 589 793 238 462 643 383
279 502 884 197 169 399 375 105 820
974 944 592 307 816 406 286 208 998
628 034 825 342 117 067 982 148 086
513 282 306 647 093 844 609 550 582
231 725 359 408 128 481 117 450 284
102 701 938 521 105 559 644 622 948
954 930 381 964 428 810 975 665 933
446 128 475 648 233 786 783 165 271
201 909 145 648 566 923 460 348 610
454 326 648 213 393 607 260 249 141
273 724 587 006 606 315 588 174 881
520 920 962 829 254 091 715 364 367
892 590 360 011 330 530 548 820 466
521 384 146 951 941 511 609 433 057
270 365 759 591 953 092 186 117 381
932 611 793 105 118 548 074 462 379
962 749 567 351 885 752 724 891 227
938 183 011 949 129 833 673 362 440
656 643 986 021 394 946 395 224 737
190 702 179 860 943 702 770 539 217
176 293 176 752 384 674 818 467 669
405 132 000 568 127 145 263 560 827
785 771 342 757 789 609 173 637 178
721 468 440 901 224 953 430 146 549
585 371 050 792 279 689 258 923 542
019 956 112 129 021 960 864 034 418
159 813 629 774 771 309 960 518 707
211 349 999 998 372 978 049 951 059
731 732 816 096 318 595 024 459 455
346 908 302 642 522 308 253 344 685
035 261 931 188 171 010 003 137 838
752 886 587 533 208 381 420 617 177
669 147 303 598 253 490 428 755 468
731 159 562 863 882 353 787 593 751
957 781 857 780 532 171 226 806 613
001 927 876 611 195 909 216 420 200
000

# 8. e AUF 1ØØØ STELLEN

Mit der Zahl $\pi$ ist die Eulersche Zahl

$$e = 2.7182818\ldots$$

über die Gleichung

$$e^{\pi i} = -1$$

verbunden, dabei ist $i = \sqrt{-1}$.

e ist insbesondere als Basis der natürlichen Logarithmen von Bedeutung

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$$

Ebenso stellt e den Grenzwert

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

dar. Mit diesem Grenzwert ist auch die Zinseszinsformel verknüpft: Wird 1 DM nicht jährlich oder monatlich, sondern kontinuierlich verzinst, so wächst der Zinseszins bei 100% nicht ins Unbeschränkte, sondern nähert sich dem Wert e DM. Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion liefert eine für numerische Zwecke brauchbare Formel für e

$$e = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots.$$

dabei stellt n! die Fakultätsfunktion dar.

Erwähnenswert ist, daß auch e als Ergebnis eines Zufallsexperiments auftritt. Werden n Dinge zufällig angeordnet, so ist mit der Wahrscheinlichkeit

$$1/e = Ø.3678794.$$

kein Gegenstand an seinem Ort. Solche Zufallsexperimente können mit Hilfe von Programm 12 erhalten werden. Der Versuch ist besser bekannt als das Problem der "vertauschten Briefe". Legt man n Briefe zufällig in n vorbereitete Umschläge, so liegt mit der Wahrscheinlichkeit

$$1 - 1/e = Ø.63212Ø5$$

mindestens ein Brief im richtigen Umschlag. Im Band 1 der vorliegenden Programmsammlung findet sich für n = 5 ein Grafikprogramm.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die Dezimalbruchentwicklung von e mit Hilfe der angegebenen Reihenentwicklung. Die Kehrwerte der benötigten Fakultäten werden durch wiederholte Divisionen berechnet und fortlaufend aufsummiert.

Das hier angegebene Programm läßt sich auf beliebige Stellenzahl ausdehnen. Die Variable N in Zeile 18Ø muß dazu so geändert werden, daß die Dezimalstellen von 1/N! bei der gewünschten Genauigkeit vernachlässigt werden können.

```
10  REM    E AUF 1000 STELLEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                    "
50  PRINT " E AUF 1000 STELLEN "
60  PRINT "                    "
70  NORMAL
80  PRINT
90  PRINT "DRUCKERAUSGABE <J/N> ";
100  INPUT PR$
110  PRINT : PRINT "FELD ANLEGEN"
120  DIM A(202)
130  FOR I = 1 TO 202
140 A(I) = 0
150  NEXT I
160 :
170  PRINT
180  PRINT "BERECHNUNG LAEUFT...": PRINT
190 B = 1E5:A(0) = 1
200  FOR N = 450 TO 1 STEP  - 1
210  HTAB 25: VTAB 9: PRINT N;"  ";
220  FOR I = 0 TO 201
230 Q =  INT (A(I) / N)
240 R = A(I) - Q * N
250 A(I) = Q
260 A(I + 1) = A(I + 1) + B * R
270  NEXT I
280 A(0) = A(0) + 1
290  NEXT N
300 :
310  REM  RUNDUNG
320  PRINT : PRINT
330  PRINT "RUNDUNG AUSFUEHREN..."
340 A(201) = A(201) +  INT (A(202) / B + .5)
350  FOR I = 200 TO 1 STEP  - 1
360 U =  INT (A(I) / B)
370 A(I) = A(I) - B * U
380 A(I - 1) = A(I - 1) + U
390  NEXT I
400 :
410  REM  AUSGABE
420  IF PR$ = "J" THEN  PR# 1: GOTO 470
```

```
430  PRINT  CHR$ (7); CHR$ (7)
440  PRINT "WEITER MIT AUSGABE <RETURN> ";
450  INPUT T$
460  HOME
470  FOR I = Ø TO 2ØØ
480 A$ =  STR$ (A(I))
490  IF I = Ø THEN  PRINT A$;".": GOTO 52Ø
500  PRINT  RIGHT$ ("ØØØØ" + A$,5);" ";
510  IF I / 6 =  INT (I / 6) THEN  PRINT
520  NEXT I
530  PRINT
540 :
550  IF PR$ = "J" THEN  PR# Ø
560  END
```

2.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 71828 | 18284 | 59045 | 23536 | 02874 | 71352 |
| 66249 | 77572 | 47093 | 69995 | 95749 | 66967 |
| 62772 | 40766 | 30353 | 54759 | 45713 | 82178 |
| 52516 | 64274 | 27466 | 39193 | 20030 | 59921 |
| 81741 | 35966 | 29043 | 57290 | 03342 | 95260 |
| 59563 | 07381 | 32328 | 62794 | 34907 | 63233 |
| 82988 | 07531 | 95251 | 01901 | 15738 | 34187 |
| 93070 | 21540 | 89149 | 93488 | 41675 | 09244 |
| 76146 | 06680 | 82264 | 80016 | 84774 | 11853 |
| 74234 | 54424 | 37107 | 53907 | 77449 | 92069 |
| 55170 | 27618 | 38606 | 26133 | 13845 | 83000 |
| 75204 | 49338 | 26560 | 29760 | 67371 | 13200 |
| 70932 | 87091 | 27443 | 74704 | 72306 | 96977 |
| 20931 | 01416 | 92836 | 81902 | 55151 | 08657 |
| 46377 | 21112 | 52389 | 78442 | 50569 | 53696 |
| 77078 | 54499 | 69967 | 94686 | 44549 | 05987 |
| 93163 | 68892 | 30098 | 79312 | 77361 | 78215 |
| 42499 | 92295 | 76351 | 48220 | 82698 | 95193 |
| 66803 | 31825 | 28869 | 39849 | 64651 | 05820 |
| 93923 | 98294 | 88793 | 32036 | 25094 | 43117 |
| 30123 | 81970 | 68416 | 14039 | 70198 | 37679 |
| 32068 | 32823 | 76464 | 80429 | 53118 | 02328 |
| 78250 | 98194 | 55815 | 30175 | 67173 | 61332 |
| 06981 | 12509 | 96181 | 88159 | 30416 | 90351 |
| 59888 | 85193 | 45807 | 27386 | 67385 | 89422 |
| 87922 | 84998 | 92086 | 80582 | 57492 | 79610 |
| 48419 | 84443 | 63463 | 24496 | 84875 | 60233 |
| 62482 | 70419 | 78623 | 20900 | 21609 | 90235 |
| 30436 | 99418 | 49146 | 31409 | 34317 | 38143 |
| 64054 | 62531 | 52096 | 18369 | 08887 | 07016 |
| 76839 | 64243 | 78140 | 59271 | 45635 | 49061 |
| 30310 | 72085 | 10383 | 75051 | 01157 | 47704 |
| 17189 | 86106 | 87396 | 96552 | 12671 | 54688 |
| 95703 | 50354 | | | | |

# 9. LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG

Ein Standardverfahren zur Lösung einer linearen Diophantischen Gleichung

$$ax + by = c$$

gleichbedeutend mit der Kongruenz

$$ax = c \bmod y$$

ist der erweiterte Euklidsche Algorithmus. Mit seiner Hilfe kann der größte gemeinsame Teiler

$$ggT\ (a,b)$$

als Linearkombination von a und b bestimmt werden.

Dies soll an einem Beispiel für a = 286 und b = 121 gezeigt werden:

$$\begin{array}{rcll}
262 : 121 &=& 2 \text{ Rest } 44 & \Rightarrow 286 = 2 \cdot 121 + 44 \\
121 : 44 &=& 2 \text{ Rest } 33 & \Rightarrow 121 = 2 \cdot 44 + 33 \\
44 : 33 &=& 1 \text{ Rest } 11 & \Rightarrow 44 = 1 \cdot 33 + 11 \\
33 : 11 &=& 3 & \Rightarrow 33 = 3 \cdot 11
\end{array}$$

Somit gilt

$$ggT\ (286, 121) = 11$$

Durch Rückwärtsrechnen folgt

$$\begin{aligned}
11 &= 44 - 33 \\
&= 44 - (121 - 2 \cdot 44) \\
&= 3 \cdot 44 - 121 \\
&= 3 \cdot (286 - 2 \cdot 121) - 121 \\
&= 3 \cdot 286 - 7 \cdot 121
\end{aligned}$$

Dies liefert die gesuchte Linearkombination

$$3 \cdot 286 - 7 \cdot 121 = 11$$

allgemein

$$ax + by = ggT\ (a,b)$$

Sind $x_o$, $y_o$ die Koeffizienten der Linearkombination, so hat die Diophantische Gleichung

$$ax + by = c$$

die allgemeine Lösung:

$$x = cx_o + \frac{a}{ggT\ (a,b)} \cdot t$$

$$y = cy_o - \frac{b}{ggT\ (a,b)} \cdot t; \quad t \text{ ganzzahlig}$$

Diese Lösung existiert nur, wenn c ein Vielfaches von ggT (a,b) ist; andernfalls ist die Gleichung nicht lösbar (vgl. [7]).

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet mit Hilfe des erweiterten Euklidschen Algorithmus nach dem oben angegebenen Verfahren eine spezielle Lösung der Gleichung

$$ax + by = \text{ggT}\ (a,b).$$

Damit wird die allgemeine Lösung bestimmt.

Das im Programm angegebene Verfahren kann prinzipiell auch für Diophantische Gleichungen der Form

$$ax - by = c$$

($b > \emptyset$) angewandt werden. In diesem Fall ergibt sich für den ggT ein negativer Wert, im Gegensatz zur üblichen Definition. Dazu müssen die Zeilen 120 und 130 gelöscht werden; zwei aufeinander stoßende negative Vorzeichen sind als positiv zu lesen.

Als Beispiel wird die Diophantische Gleichung

$$17x + 6y = 5$$

gelöst. Das Programm liefert die Parameterlösung

$$x = -5 - 6t$$
$$y = 15 + 17t$$

dabei durchläuft t alle ganzen Zahlen. Für jeden Wert von t ergibt sich wieder eine spezielle Lösung, z.B. für

$$t = \emptyset : x = -5, y = 15$$
$$t = 1 : x = -11, y = 32$$
$$t = -1 : x = 1, y = -2$$

usw. Zahlreiche Diophantische Gleichungen findet man in eingekleideter Form in den historischen Aufgaben des Anhangs.

```
10  REM  LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " DIOPHANTISCHE GLEICHUNG "
60  PRINT "                              "
70  PRINT "       A*X + B*Y = C          "
80  PRINT "                              "
90  NORMAL
100  PRINT : PRINT
110  INPUT "EINGABE A,B,C ? ";A,B,C: GOTO 140
120  IF A > 0 AND B > 0 THEN 170
130  PRINT "A UND B MUESSEN POSITIV SEIN": GOTO 110
140 :
150  PRINT "--------------------------------------"
160  PRINT
170 A0 = A:A1 = B
180 X0 = 1:Y1 = 1
190 Y0 = 0:X1 = 0
200 :
210  REM  ERWEITETER EUKLIDSCHER ALGORITHMUS
220 Q =  INT (A0 / A1)
230  IF A0 / A1 = Q THEN 320
240 A2 = A0 - Q * A1
250 X2 = X0 - Q * X1
260 Y2 = Y0 - Q * Y1
270 A0 = A1:A1 = A2
280 X0 = X1:X1 = X2
290 Y0 = Y1:Y1 = Y2
300  GOTO 220
310 :
320  PRINT "GGT(";A;",";B;")=";A2
330  PRINT : PRINT
340  PRINT "LOESUNG DER GLEICHUNG A*X+B*Y=GGT(A,B)"
350  PRINT
360 :
370  PRINT A;"*";
380  IF X2 < 0 THEN  PRINT "(";X2;")";: GOTO 400
```

```
390  PRINT X2;
400  IF B < Ø THEN  PRINT B;: GOTO 42Ø
410  PRINT "+";B;
420  PRINT "*";
430  IF Y2 < Ø THEN  PRINT "(";Y2;")";: GOTO 45Ø
440  PRINT Y2;
450  PRINT "=";A2
460  IF C / A2 < > INT (C / A2) THEN  GOTO 54Ø
470 :
480  PRINT : PRINT : PRINT "ALLG. LOESUNG DER DIOPH. GLEICHG.:"
490  PRINT
500  PRINT "X=";C * X2 / A2;"-T*";B;"    ";
510  PRINT "Y=";C * Y2 / A2;"+T*";A;
520  PRINT "     T GANZZAHLIG"
530  END
540  PRINT : PRINT "KEINE LOESEUNG"
550  END
```

```
DIOPHANTISCHE GLEICHUNG

      A*X + B*Y = C


EINGABE A,B,C ? 17,6,5
--------------------------------------

GGT(17,6)=1


LOESUNG DER GLEICHUNG A*X+B*Y=GGT(A,B)

17*(-1)+6*3=1


ALLG. LOESUNG DER DIOPH. GLEICHG.:

X=-5-T*6    Y=15+T*17    T GANZZAHLIG
```

375. 1875.
fl. 393|75 hauptgůt vñ gewin des erstẽ jars.
196875
413|4375 Andern
2067187 5
434|109375 Dritten
2170546875
455|81484375 Vierdten
227907421875
478|6055859375 Fünfften
23930279296875
502|535865234375 Sechsten
2512679326171875
527|66265849609375 Sibenden
263831329248046875
554|0457914208084375 Achteten
27702289571044921875
581|748080991943359375 Neündtẽ
2908740409059716796875
fl. 610|83548504154052734375 Zehẽtẽ
ß 6|68788033232421875000
₰ 20|61640996972656250000.
72 Die 120 fl tragẽ 2 jar p hauptgůt zins vnd
zinszins 132 fl 2 ß 12 ₰. Bringt zinß vñ zinszins
12 fl 2 ß 12 ₰. Darnach die 250 fl tragẽ 3 jar
haupt. zins vñ zinszinß 289 fl 3 ß 7 ₰ $\frac{1}{4}$. Vnd
ist halber zins des vierdtẽ jars 7 fl 1 ß 26. ₰ $\frac{7}{16}$.
h ñ

"Aus dem Exempel-Büchlin von Christoph Rudolff, Augsburg 1530. In diesem Buch wurden erstmals Dezimalbrüche systematisch genutzt"

# 10. KETTENBRUCH / BRUCHAPPROXIMATION

Sucht man zu einem vorgegebenen Dezimalbruch einen Quotienten gleichen Werts – z.B. ein Windungszahlverhältnis beim Transformator – so kann dieser mit Hilfe eines Kettenbruchs bestimmt werden.

Ein Kettenbruch hat folgende Form

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\dots}}}}}$$

Solche Kettenbrüche können für rationale, d.h. für Bruchzahlen durch den Euklidschen Algorithmus berechnet werden.

Für 67/29 ergibt sich z.B.

$$\begin{aligned} 67 &: 29 = 2 \text{ Rest } 9 \\ 29 &: \phantom{2}9 = 3 \text{ Rest } 2 \\ 9 &: \phantom{2}2 = 4 \text{ Rest } 1 \\ 2 &: \phantom{2}1 = 2 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

Setzt man diese Gleichungen rückwärts ineinander, so ergibt sich der Kettenbruch

$$\frac{67}{29} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}$$

Der Euklidsche Algorithmus zeigt, daß der Kettenbruch einer rationalen Zahl abbricht, jedoch nicht der einer irrationalen Zahl. Ein Beweis dazu findet sich in [14]. Kettenbrüche können somit durch folgendes Programm berechnet werden

```
100 INPUT "DEZIMALBRUCH"; X
110 PRINT INT (X)
120 IF X=INT(X) THEN 150
130 X=1/(X-INT(X))
140 GOTO 110
150 END
```

jedoch muß dabei noch die beschränkte Genauigkeit des Rechners beachtet werden.

**Zum folgenden Programm**

Das folgende Programm berechnet zu einem eingegebenen Dezimalbruch maximal 8 Teilnenner nach dem oben angegebenen Programmstück. Dabei wird versucht Rechnerungenauigkeiten, so weit wie möglich, abzufangen.

Der so berechnete Kettenbruch wird auf dem Drucker ausgegeben und die zugehörige rationale Zahl berechnet.

Als Programmbeispiel wurde

$$\pi = 3.14159265$$

eingegeben. Man erhält die Bruchapproximation

$$\frac{251690445}{80115557}$$

Der ausgegebene Kettenbruch kann dem Programmausdruck entnommen werden.

```
10  REM  KETTENBRUCH/BRUCHAPPROXIMATION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                                  "
50  PRINT " KETTENBRUCH/BRUCHAPPROXIMATION "
60  PRINT "                                  "
70  NORMAL
80  PRINT : PRINT
90  INPUT "DRUCKER EINGESCHALTET ? ";A$
100  IF  LEFT$ (A$,1) <  > "J" THEN 50
110 :
120  PRINT : PRINT
130  INPUT "DEZIMALZAHL ? ";Y
140  DIM R(12)
150 :
160  PR# 1
170 K = 8
180  FOR I = 1 TO K
190 R(I) =  INT (Y + 1E - 5)
200  IF  ABS (R(I) - Y) < 1E - 5 THEN 240
210 Y = 1 / (Y - R(I))
220  NEXT I
230  GOTO 250
240 K = I
250  PRINT R(1);" + 1"
260  FOR I = 2 TO K - 1
270  PRINT  TAB( I * 6 - 7);"-------"
280  PRINT  TAB( I * 6 - 6);R(I);" + 1"
290  NEXT I
300  PRINT  TAB( K * 6 - 7);"----"
310  PRINT  TAB( K * 6 - 6);R(K)
320 :
330 Z = R(K)
340 N = 1
350  FOR J = K - 1 TO 1 STEP  - 1
360 I = Z
370 Z = R(J) * Z + N
380 N = I
```

```
390  NEXT J
400  PRINT " ";Z
410  PRINT "=-------------= ";
420  PRINT Z / N
430  PRINT " ";N
440  PRINT : PRINT
450  PR# Ø
460  END
```

```
3 + 1
    -------
     7 + 1
         -------
          15 + 1
              -------
               1 + 1
                   -------
                    288 + 1
                        -------
                         2 + 1
                             -------
                              4 + 1
                                  ----
                                   272

 251690445
=-------------= 3.14159265
 80115557
```

# 11. PERMUTATIONEN

Da endliche n–elementige Mengen stets auf die Menge

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

abgebildet werden können, arbeiten die folgenden Kombinatorik-Programme stets mit dieser Anfangsmenge der natürlichen Zahlen.
Jede Anordnung der Menge 1, 2, 3, . . ., n, bei der jedes Element genau einmal vorkommt, heißt Permutation.

Permutationen treten vielfach in der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Man benötigt sie insbesondere auch in Operations Research, wenn man z.B. auf der Suche nach der kürzesten Rundreise alle Anordnungen der zu besuchenden Städte durchmustern muß.

Es gibt

$$n!$$

Permutationen einer n–elementigen Menge; dabei ist n! die in Programm 6 behandelte Fakultätsfunktion.

Die Fakultäten der Zahlen wachsen sehr schnell, so gilt

6! = 72Ø, 7! = 5Ø4Ø, 8! = 4Ø32Ø
9! = 36288Ø, 1Ø! = 36288ØØ
11! = 399168ØØ

Somit gibt es für 10 Leute bei 10 Sitzplätzen

36288ØØ

verschiedene Sitzordnungen. Spielt in einer Fußballmannschaft jeder auf jeder Position, so gibt es

399168ØØ

verschiedene Mannschaftsaufstellungen.

**Zu folgendem Programm**

Das folgende Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Ord-Smith die Permutation einer n–elementigen Menge in lexikographischer Anordnung.

Dabei heißen zwei Zahlenfolgen $a_i$ und $b_i$ lexikographisch geordnet, wenn für die erste Stelle mit

$$a_i \neq b_i$$

gilt

$$a_i \leqslant b_i$$

Der Programmausdruck zeigt die Permutation einer 4–elementigen Menge.

```
10  REM  PERMUTATIONEN
20  HOME : INVERSE
30  PRINT "                 "
40  PRINT " PERMUTATIONEN "
50  PRINT "                 "
60  NORMAL : PRINT : PRINT
70 :
80  INPUT "WIEVIELE ELEMENTE ? ";N
90  DIM X(N),Y(N)
100  PRINT
110  INPUT "DRUCKERAUSGABE ? ";PR$
120  PRINT
130 :
140  IF PR$ = "J" THEN  PR# 1
150  REM  STARTWERTE
160  FOR I = 1 TO N
170 X(I) = I
180  NEXT I
190 F = 0:P = 0
200 :
210  FOR I = 1 TO N
220  PRINT X(I);
230  NEXT I: PRINT
240 P = P + 1
250  GOSUB 330
260  IF F = 1 GOTO 210
270 :
280  PRINT : PRINT
290  PRINT P;"  PERMUTATIONEN"
300  PR# 0
310  END
320 :
330  REM  UNTERPROGRAMM
340 N1 = N - 1
350  IF F = 1 THEN 400
360 F = 1
370  FOR K = 1 TO N1
380 Y(K) = N
```

```
390  NEXT K
400  IF Y(N1) <  > N THEN 450
410 Y(N1) = N1:L = X(N)
420 X(N) = X(N1):X(N1) = L
430  GOTO 650
440 :
450  FOR J = 1 TO N1
460 K = N - J
470  IF Y(K) <  > K THEN 540
480 Y(K) = N
490  NEXT J
500 F = 0
510 K = 1
520  GOTO 580
530 :
540 M = Y(K):L = X(M)
550 X(M) = X(K):X(K) = L
560 Y(K) = M - 1
570 K = K + 1
580 M = N
590 :
600 L = X(M):X(M) = X(K)
610 X(K) = L
620 M = M - 1
630 K = K + 1
640  IF K < M THEN 600
650  RETURN
```

PERMUTATIONEN

```
WIEVIELE ELEMENTE ? 4

DRUCKERAUSGABE ? J

1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
2431
3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

24  PERMUTATIONEN
```

# 12. ZUFALLSPERMUTATION

Für viele Zwecke benötigt man zufällige Permutationen, z.B. für die bei Programm 8 erwähnten Monte-Carlo-Simulation der vertauschten Briefe.

Als Anfangswert wird die Permutation P(I) der Zahlen 1, . ., n auf die natürliche Reihenfolge gesetzt.

Sodann werden n−1 ganzzahlige Zufallszahlen ausgelost und die Permutation mit entsprechendem Index ausgetauscht. Dies wird durch folgendes Programmstück durchgeführt.

```
260 FOR J=N TO 2 STEP -1
270 R = INT (J * RND(1)) + 1
280 H = P(J) : P(J) = P(R) : P(R) = H
290 NEXT J
```

Die so erhaltene Zufallspermutation wird ausgedruckt und bei Bedarf eine neue erzeugt.

**Zum folgenden Programm**

Nach Abfrage, wieviele Zahlen die Permutation umfassen soll und wieviele Permutationen erwünscht sind, werden nach dem angegebenen Verfahren mit Hilfe des eingebauten Zufallszahlengenerators die benötigten zufälligen Permutationen erzeugt.
Der Programmausdruck zeigt 20 Zufallspermutationen der Zahlen 1 bis 9.

```
100  REM  ZUFALLSPERMUTATIONEN
101  HOME : INVERSE
102  PRINT "                          "
110  PRINT " ZUFALLSPERMUTATIONEN "
112  PRINT "                          "
113  NORMAL : PRINT : PRINT
120 :
130  INPUT "WIEVIELE ZAHLEN ? ";N
140  DIM P(N)
150  PRINT : INPUT "WIEVIELE ZUFALLSPERMUTATIONEN ? ";M
160  PRINT
170 :
180 I = 1: REM  ZAEHLER
190 :
200  REM  ANFANGSWERTE
210  FOR J = 1 TO N
220 P(J) = J
230  NEXT J
240 :
250  REM  AUSLOSEN DER REIHENFOLGE
260  FOR J = N TO 2 STEP  - 1
270 R =  INT (J *  RND (1)) + 1
280 H = P(J):P(J) = P(R):P(R) = H
290  NEXT J
300 :
310  REM  AUSGABE
320  FOR J = 1 TO N
330  PRINT P(J);
340  NEXT J: PRINT
350 :
360 I = I + 1
370  IF I <  = M THEN 210
380  END
```

```
ZUFALLSPERMUTATIONEN


WIEVIELE ZAHLEN ? 9

WIEVIELE ZUFALLSPERMUTATIONEN ? 20

628475139
813675249
759421863
698154372
458917326
562389147
273158694
486193527
217385946
432571869
163549782
765921834
598621437
145867923
243876951
718542936
718632459
864925137
314596278
237641895
```

# 13. KOMBINATIONEN

Ordnet man nur k Elemente einer n-elementigen Menge ohne Wiederholung an, so erhält man eine k-Kombination oder auch Kombination k.-ter Klasse.

Die Anzahl der k-Kombinationen einer n-elementigen Menge schreibt man

$$\binom{n}{k}$$

und bezeichnet dies als Binomialkoeffizient. Diese tragen ihren Namen daher, weil sie als Koeffizienten in den binomischen Formeln, z.B.

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

auftreten.

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ finden sich jeweils in der (n+1)-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks:

```
                  1
               1     1
            1     2     1
         1     3     3     1
      1     4     6     4     1
   1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15    20     1
```

Die Binomialkoeffizienten können auch über die Fakultätsfunktion berechnet werden

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

So kann beim Schafkopf (24 Karten, 3 Spieler) jeder Spieler

$$\binom{24}{8} = 735471$$

Blätter haben. Beim Lottospiel gibt es

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

verschiedene Lottotips, beim neuen Mittwochslotto entsprechend

$$\binom{38}{7} = 12620256$$

**Zum folgenden Programm**

Das Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Kurtzberg alle k-Kombinationen (oder k-ten Klasse) einer n-elementigen Menge.

Der Programmausdruck zeigt die

4-Kombinationen

einer 6-elementigen Menge.


Eyn Newe
Vnnd wolgegründte
vnderweysung aller Kauffmanß Rech-
nung in dreyen Büchern/mit schönen Re
geln vñ fragstucken begriffen. Sunder-
lich was vortl vnnd behendigkait in der
Welschē Practica vñ Tolletn gebraucht
wirdt/ des gleychen fürmalß wider in
Teütscher noch in Welscher sprach nie
gedrückt. durch Petrum Apianū
von Leyßnick/d Astronomei
zů Ingolstat Ordina-
riū/ verfertiget.

"Titelblatt der Arithmetik von Petrus Apianus, Ingolstadt 1527 mit der ersten gedruckten Darstellung des Pascalschen Dreiecks"

```
10  REM  KOMBINATIONEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                    "
50  PRINT " KOMBINATIONEN "
60  PRINT "                    "
70  PRINT : NORMAL
80  INPUT "WIEVIELE ELEMENTE ? ";N
90  PRINT : INPUT "ZU WELCHER KLASSE ? ";M
100  DIM X(M)
110 :
120  REM  STARTWERTE
130 L = 1
140  FOR I = 1 TO M
150 X(I) = N
160  NEXT I
170 :
180  REM  M AUS N
190 P = 1
200  IF M = 0 THEN 260
210  FOR I = 1 TO M
220 P = P * (N - I + 1) / I
230  NEXT I
240  PRINT
250 :
260  GOSUB 370
270  FOR I = 1 TO M
280  PRINT X(I);
290  NEXT I: PRINT
300 L = L + 1
310  IF L <  = P THEN 260
320 :
330  PRINT
340  PRINT P;" KOMBINATIONEN"
350  END
360 :
370  REM  UNTERPROGRAMM
380  FOR K = 1 TO M
```

```
390 J = K - 1
400 A = M - J
410 B = N - J
420  IF X(A) < B THEN 500
430  NEXT K
440 :
450  FOR K = 1 TO M
460 X(K) = K
470  NEXT K
480  RETURN
490 :
500 B = X(A)
510  FOR K = A TO M
520 B = B + 1
530 X(K) = B
540  NEXT K
550  RETURN
```

```
 KOMBINATIONEN


WIEVIELE ELEMENTE ? 6

ZU WELCHER KLASSE ? 4

1234
1235
1236
1245
1246
1256
1345
1346
1356
1456
2345
2346
2356
2456
3456

15 KOMBINATIONEN



ÜLOADKOMBINATION,D2
```

# 14. VARIATIONEN

Ordnet man k Elemente einer n-elementigen Menge unter Berücksichtigung der Reihenfolge an, so erhält man eine k-Variation oder Variation zu k-ten Klasse.
Es gibt

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

k-Variationen einer n-elementigen Menge.

Wollen von 20 Personen 8 Leute an einem bestimmten Tisch sitzen, so gibt es dort

$$\frac{2Ø!}{12!} = 5Ø7911Ø4ØØ$$

verschiedene Sitzordnungen. Aus einem Gremium von 30 Personen gibt es

$$\frac{3Ø!}{27!} = 2436Ø$$

verschiedene Möglichkeiten einen Präsidenten, dessen 1. und 2. Stellvertreter auszuwählen.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm erzeugt alle k-Variationen oder Variationen zur k.-ten Klasse einer n-elementigen Menge.

Der Programmausdruck zeigt alle 3 Variationen einer 4-elementigen Menge.

```
10  REM  VARIATIONEN
20  HOME : INVERSE
30  PRINT "                 "
40  PRINT " VARIATIONEN "
50  PRINT "                 "
60  NORMAL : PRINT
70 :
80  INPUT "ZAHL DER ELEMENTE ? ";N
90  PRINT : INPUT "ZU WELCHER KLASSE ? ";K
100  PRINT
110 :
120  REM  STARTWERTE
130  FOR I = 1 TO N
140 X(I) = I
150  NEXT I
160 M = K
170  IF K = N THEN M = M - 1
180  FOR I = 1 TO M
190 Y(I) = I
200  NEXT I
210 V = 0
220 :
230 I = M
240  FOR J = 1 TO K
250  PRINT X(J);
260  NEXT J: PRINT
270 V = V + 1
280 :
290  IF Y(I) > = N THEN 340
300 Y(I) = Y(I) + 1:H = X(I)
310 X(I) = X(Y(I)):X(Y(I)) = H
320  GOTO 230
330 :
340 H = X(I):X(I) = X(Y(I))
350 X(Y(I)) = H:Y(I) = Y(I) - 1
360  IF Y(I) > I THEN 340
370 :
380 I = I - 1
```

```
390  IF I > Ø THEN 29Ø
4ØØ :
41Ø  PRINT
42Ø  PRINT V;" VARIATIONEN"
43Ø  END
```

```
VARIATIONEN


ZAHL DER ELEMENTE ? 4

ZU WELCHER KLASSE ? 3

123
124
132
134
142
143
213
214
231
234
241
243
312
314
321
324
341
342
412
413
421
423
431
432

24 VARIATIONEN
```

# 15. Ø1-TUPEL

Wählt man k Elemente aus einer n-elementigen Menge aus und läßt dabei beliebige Wiederholung zu, so erhält man die

k-tupel

der Menge. Im Fall von k=2 spricht man auch von Paaren, bei k=3 von Tripel.

Es gibt insgesamt

$n^k$

k-Tupel einer n-elementigen Menge.

Besondere Bedeutung haben die 8-Tupel der Binärzahlen Ø und 1, Byte genannt, für Computer. Alle ganzen Zahlen werden mit Hilfe zweier Bytes dargestellt. Da das erste Byte das Vorzeichen angibt, können somit INTEGER-Zahlen mit 15 Bit dargestellt werden. Es sind dies die Zahl Ø bis 32767.

Weitere Anwendungen finden die Ø1-Tupel, da mit ihrer Hilfe alle Teilmengen einer gegebenen Menge erzeugt werden können: Ist die i.-te Stelle des Ø1-Tupel Eins, so gehört das Element i zur entsprechenden Teilmenge, sonst nicht.

Somit hat eine n-elementige Menge soviele Teilmengen, wie der Ø1-Tupel der Länge n gibt, nämlich

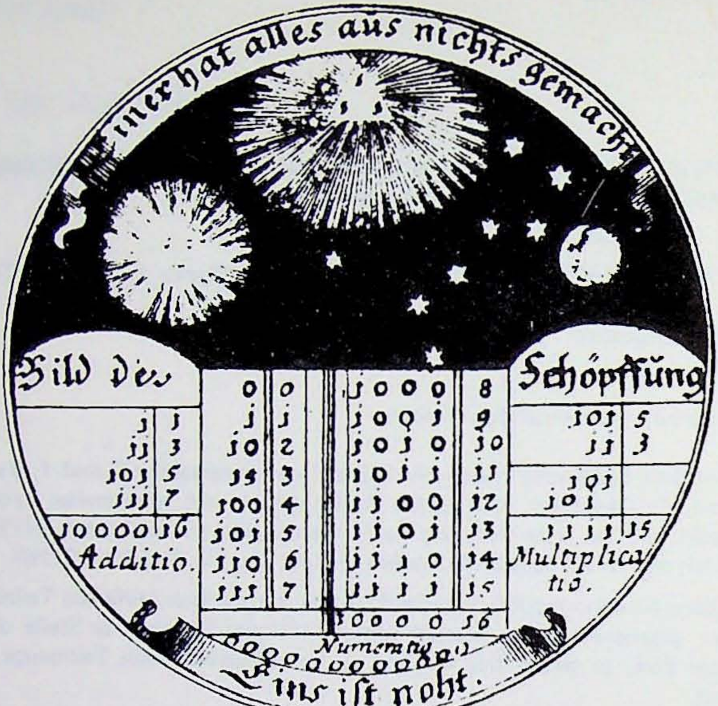
$2^n$

Wichtig sind Ø1-Tupel auch in der Boole'schen Algebra und Aussagenlogik, da mit ihrer Hilfe alle Wahrheitswerte von Aussageverknüpfungen ermittelt werden können (siehe Logikprogramme im Band 1 der vorliegenden Programmsammlung). Allerdings wird im CBM-BASIC "wahr" nicht als 1, sondern als —1 codiert; dies kann aber im Programm durch eine Vorzeichenänderung erreicht werden.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm erzeugt nach einem Algorithmus von Berztiss alle Ø1-Tupel der gewünschten Länge.
Läßt man in Zeile 25Ø statt X(K) das Element A(K) einer Menge — falls X(K) = 1 — ausdrucken, so erhält man alle Teilmengen dieser Menge.

Der Programmausdruck zeigt alle Ø1-Tupel der Länge 5.




"Entwurf von Leibniz für eine Gedenkmünze, die das von ihm gefundene Binärsystem darstellt (1697)"

```
10  REM  01-N-TUPEL
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "              "
50  PRINT " 01-N-TUPEL "
60  PRINT "              "
70  NORMAL : PRINT
80  INPUT "LAENGE DER 01-TUPEL ? ";N
90  DIM X(N)
100  PRINT
110 :
120  REM  STARTWERTE
130 J = 2 ^ N
140 L = 1
150  FOR K = 1 TO N
160 X(K) = 0
170  NEXT K
180 :
190  FOR K = 1 TO N
200  PRINT X(K);
210  NEXT K: PRINT
220 L = L + 1
230  IF L > J THEN 270
240  GOSUB 310
250  GOTO 190
260 :
270  PRINT
280  PRINT J;" ";N;"-TUPEL"
290  END
300 :
310  REM  UNTERPROGRAMM
320 I = 1
330  IF X(I) <  > 0 THEN 360
340 X(I) = 1
350  GOTO 390
360 X(I) = 0
370 I = I + 1
380  IF I <  = N THEN 330
390  RETURN
```

```
Ø1-N-TUPEL

LAENGE DER Ø1-TUPEL ? 5

ØØØØØ
1ØØØØ
Ø1ØØØ
11ØØØ
ØØ1ØØ
1Ø1ØØ
Ø11ØØ
111ØØ
ØØØ1Ø
1ØØ1Ø
Ø1Ø1Ø
11Ø1Ø
ØØ11Ø
1Ø11Ø
Ø111Ø
1111Ø
ØØØØ1
1ØØØ1
Ø1ØØ1
11ØØ1
ØØ1Ø1
1Ø1Ø1
Ø11Ø1
111Ø1
ØØØ11
1ØØ11
Ø1Ø11
11Ø11
ØØ111
1Ø111
Ø1111
11111

32 5-TUPEL
```

# 16. PARTITIONEN

Unter einer Partition der Zahl n versteht man die Zerlegung von n in Summanden, wobei es auf die Anordnung nicht ankommt. So hat die Zahl 6 folgende 11 Partitionen:

$$
\begin{aligned}
6 &= 6\\
&= 5+1\\
&= 4+2\\
&= 4+1+1\\
&= 3+3\\
&= 3+2+1\\
&= 3+1+1+1\\
&= 2+2+2\\
&= 2+2+1+1\\
&= 2+1+1+1+1\\
&= 1+1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

Solche Partitionen werden benötigt bei Geldwechsel- und Frankatur-Problemen.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm erzeugt sämtliche Partitionen einer Zahl nach einem Algorithmus von McKay.

Der Programmausdruck zeigt die 42 Partitionen der Zahl 1Ø.

```
10  REM  PARTITIONEN
20  HOME : INVERSE
30  PRINT "             "
40  PRINT " PARTITIONEN "
50  PRINT "             "
60  NORMAL : PRINT
70 :
80  INPUT "WELCHE ZAHL ? ";N
90  DIM P(N)
100 :
110  REM  ANFANGSWERTE
120 P(1) = N
130 K = 1:F = 0:Z = 0
140  PRINT
150  PRINT "PARTITIONEN VON ";N
160  PRINT
170 :
180  REM  UNTERPROGRAMMAUFRUF
190  GOSUB 290
200 Z = Z + 1
210  FOR J = 1 TO K
220  PRINT P(J);
230  NEXT J: PRINT
240  IF F = 1 THEN 190
250  PRINT
260  PRINT Z;" PARTITIONEN"
270  END
280 :
290  REM  UNTERPROGRAMM
300  IF F = 1 THEN 390
310 F = 1
320  FOR I = 1 TO K
330  IF P(I) = 1 THEN 510
340  NEXT I
350 :
360 I = K
370  GOTO 510
380 :
390 L = K - I
400 K = I
410 P(I) = P(I) - 1
420  IF P(K) > L THEN 480
```

```
430 L = L - P(K)
440 K = K + 1
450 P(K) = P(K - 1)
460  GOTO 420
470 :
480 K = K + 1
490 P(K) = L + 1
500  IF P(I) <  > 1 THEN I = K
510  IF P(I) = 1 THEN I = I - 1
520  IF I = 0 THEN F = 0
530  RETURN
```

```
PARTITIONEN

WELCHE ZAHL ? 1Ø

PARTITIONEN VON 1Ø

1Ø
91
82
811
73
721
7111
64
631
622
6211
61111
55
541
532
5311
5221
52111
511111
442
4411
433
4321
43111
4222
42211
421111
4111111
3331
3322
33211
331111
32221
322111
```

```
3211111
31111111
22222
222211
2221111
22111111
211111111
1111111111

42 PARTITIONEN
```

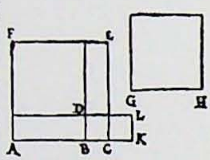
relinquitur prima 6 m: ℞ $30\frac{6}{7}$, hæ autem quantitates proportionales ſunt, & quadratum ſecundæ eſt æquale duplo producti ſecundæ in primam, cum quadruplo primæ, ut proponebatur.

## De cubo & rebus æqualibus numero. Cap. XI.

SCipio Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermé capitulum hoc inuenit, tradidit uero Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cũ in certamen cũ Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando ueniſſet, occaſionem dedit, ut Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus, eamq́ꝫ in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiecimus.

### Demonstratio.

Sit igitur exempli cauſa cubus G H & ſexcuplum lateris G H æquale 20, & ponam duos cubos A E & C L, quorum differentia ſit 20, ita quod productum A C lateris, in C K latus, ſit 2, tertia ſcilicet numeri rerum pars, & abſcindam C B, æqualem C K, dico, quod ſi ita fuerit, lineam A B reſiduum, eſſe æqualem G H, & ideo rei æſtimationem, nam de G H iam ſupponebatur, quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti 6ᵢ capituli huius libri, corpora D A, D C, D E, D F, ut per D C intelligamus cubum B C, per D F cubum A B, per D A triplum C B in quadratum A B, per D E triplum A B in quadratũ B C. quia igitur ex A C in C K fit 2, ex A C in C K ter fiet 6 numerus rerum, igitur ex A B in triplum A C in C K fiunt 6 res A B, ſeu ſexcuplum A B, quare triplum producti ex A B, B C, A C, eſt ſexcuplum A B, at uero differentia cubi A C, à cubo C K, & exiſtenti à cubo B C ei æq̃le ex ſuppoſito, eſt 20, & ex ſuppoſito primo 6ᵢ capituli, eſt aggregatum corporum D A, D E, D F, tria igitur hæc corpora ſunt 20, poſita uero B C m: cubus A B, æqualis eſt cubo A C, & triplo A C in quadratum C B, & cubo B C m: & triplo B C in quadratum A C m: per demonſtrata illic, differentia autem tripli B C in quadratum A C, à triplo A C in quadratum B C eſt productum A B, B C, A C, quare cum hoc, ut demonſtratum eſt, æquale ſit ſexcuplo A B, igitur addito ſexcuplo A B, ad id quod fit ex A C in quadratum B C ter, fiet triplum B C in quadratum A C, cum igitur B C ſit m: iam oſtenſum eſt, quod productum C B in




"Erste Seite aus der Ars Magna von Geronimo Cardano, Nürnberg 1545"

# 17. KUBISCHE GLEICHUNG

Die kubische Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

kann mit Hilfe der Cardano-Formel gelöst werden. Die Cardano-Formel ist für das Rechnen von Hand äußerst umständlich, so daß man meist zu einem Iterationsverfahren greift (vgl. Programm 31). Sie liefert jedoch im Gegensatz zu den Iterationsverfahren sämtliche Lösungen der Gleichung.

Dividiert man die kubische Gleichung durch a und führt die Substitution

$$y = x + \frac{b}{3a}$$

durch, so erhält man die sogenannte reduzierte Gleichung

$$y + 3py + 2q = 0$$

mit

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} \qquad 3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$$

Aus p und q berechnet sich die kubische Resultante

$$D = q^2 + p^3$$

Ihr Vorzeichen gibt Auskunft über die Art der Lösungen:

Ist $D > 0$, so gibt es 1 reelle, 2 konjugiert komplexe Lösungen
Ist $D < 0$, so gibt es 3 reelle Lösungen
Ist $D = 0$, so gibt es mehrfache, reelle Wurzeln

Mit Hilfe der 3. Wurzel

$$\sqrt[3]{-q \pm \sqrt{D}}$$

können nun die gesuchten Lösungen berechnet werden. Im Fall $D<0$ allerdings, ist in der Cardano-Formel eine komplexe Wurzel zu ziehen. Deswegen wird hier eine trigonometrische Lösung durchgeführt. Die hierbei benötigte Umkehrfunktion arccos(x) der Cosinus-Funktion ist nicht in BASIC implementiert. Sie muß daher über die Arctangens-Funktion ausgedrückt werden.

Es gilt

$$\arccos x = \begin{cases} \arctan \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } \emptyset < x \leqslant 1 \\ \arctan \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \pi & \text{für } -1 \leqslant x < \emptyset \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } x = \emptyset \end{cases}$$

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die Lösung der kubischen Gleichung nach dem angegebenen Verfahren von Cardano.

Eine berühmte kubische Gleichung ist

$$x^3 + 2x^2 + 1\emptyset x - 2\emptyset = \emptyset$$

Sie wurde Leonardo von Pisa (ca. 1170 – 1250), genannt Fibonacci, von Johann von Palermo, einem Höfling von Friedrich II, zur Lösung gestellt. Fibonacci fand die Lösung

$$x = 1.3688\emptyset81\emptyset75$$

die auf 8(!) Dezimalen genau ist.

Die Eingabe der Koeffizienten ins Programm liefert, neben der genannten Lösung, noch die beiden komplexen Lösungen

$$-1.6844\emptyset4\emptyset5 \pm 3.43133135i$$

```
10  REM  KUBISCHE GLEICHUNG
20 :
30 PI = 3.141592654
40 :
50  HOME : INVERSE
60  PRINT "                         "
70  PRINT " KUBISCHE GLEICHUNG "
80  PRINT "                         "
90  PRINT "  AX^3+BX^2+CX+D=Ø  "
100  PRINT "                         "
110  NORMAL : PRINT
120  PRINT "EINGABE DER KOEFFIZIENTEN"
130  PRINT
140  INPUT "A, B, C, D ? ";A,B,C,D
150  PRINT
160  IF A = Ø THEN  PRINT "KEINE KUBISCHE GLEICHUNG": END
170 A1 = A:A = B / A1:B = C / A1:C = D / A1
180 :
190  REM  PARAMETER DER REDUZ.GLEICHUNG
200 P =  - A * A / 9 + B / 3
210 Q = A * A * A / 27 - A * B / 6 + C / 2
220 :
230  REM  KUBISCHE RESULTANTE
240 R = Q * Q + P * P * P
250 :
260  REM  FALLUNTERSCHEIDUNG
270  ON  SGN (R) + 2 GOTO 490,410,290
280 :
290  REM  1 REELLE,2 KOMPLEXE LOESUNGEN
300 U =  SQR (R) - Q:U =  SGN (U) *  ABS (U) ^ (1 / 3)
310 V =  -  SQR (R) - Q:V =  SGN (V) *  ABS (V) ^ (1 / 3)
320 X1 = U + V - A / 3
330  REM   REAL- UND IMAGINAERTEIL
340 X2 =  - (U + V) / 2 - A / 3:X3 = (U - V) / 2 *  SQR (3)
350  PRINT "X1=";X1
360  PRINT
370  PRINT "X2=";X2;"+I*";X3
380  PRINT
390  PRINT "X3=";X2;"-I*";X3: END
400 :
410  REM  REELLE DOPPELLOESUNG
420 U = ( - Q) ^ (1 / 3)
```

```
430 X1 = 2 * U - A / 3
440 X2 =  - U - A / 3
450  PRINT "X1=";X1
460  PRINT
470  PRINT "X2=X3=";X2: END
480 :
490  REM  3 REELLE LOESUNGEN
500 X =  - Q /  SQR ( - P ^ 3)
510  REM  DEFINITION DES ARCCOS
520  DEF  FN AC(X) =  ATN ( SQR (1 - X * X) / X)
530  IF X > 0 THEN PHI =  FN AC(X): GOTO 560
540  IF X < 0 THEN PHI =  FN AC(X) + PI: GOTO 560
550 PHI = PI / 2
560 X1 = 2 *  SQR ( - P) *  COS (PHI / 3) - A / 3
570 X2 =  - 2 *  SQR ( - P) *  COS ((PHI + PI) / 3) - A / 3
580 X3 =  - 2 *  SQR ( - P) *  COS ((PHI - PI) / 3) - A / 3
590  PRINT "X1=";X1
600  PRINT
610  PRINT "X2=";X2
620  PRINT
630  PRINT "X3=";X3
640  PRINT
650  END
```

```
 KUBISCHE GLEICHUNG

  AX^3+BX^2+CX+D=Ø


EINGABE DER KOEFFIZIENTEN

A, B, C, D ? 1,2,1Ø,-2Ø

X1=1.368808ll

X2=-1.684404Ø5+I*3.43133135

X3=-1.684404Ø5-I*3.43133135
```

```
[illegible]
[illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] PRINT
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] PRINT
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] PRINT
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] PRINT
[illegible] END
```

[illegible]

## 18. GLEICHUNG VIERTEN GRADES

Ebenso wie die kubische Gleichung kann auch die Gleichung 4. Grades

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

mit Hilfe von Wurzeltermen gelöst werden. Nach Ferrari kann die Lösung der Gleichung 4. Grades auf die kubische Gleichung

$$8y^3 - 4cy^2 + (2bd-8e)y + e(4c-b^2) - d^2 = 0$$

zurückgeführt werden. Setzt man eine Lösung $y$ in die quadratische Gleichung

$$x + \frac{1}{2}(b+A)x + (y + \frac{by-d}{A}) = 0$$

mit

$$A = \pm\sqrt{8y + b^2 - 4c}$$

ein, so liefert deren Lösung schließlich die gesuchten Lösungen der ursprünglichen Gleichung 4. Grades.

Es ist klar, daß die Lösung nach Ferrari für das Rechnen von Hand zu kompliziert ist. Daher werden Gleichungen 4. Grades meist mit Iterationsverfahren angegegangen. Da jedoch Gleichungen 4. Grades nicht notwendig reelle Lösungen haben, kann es hier zu Konvergenzschwierigkeiten kommen. Da aber die Gleichungen vom 3. und 4. Grad häufig vorkommen – insbesondere im Zusammenhang mit dem charakteristischen Polynom einer Matrix – ist das vorliegende Programm sehr nützlich.

Nachdem Ferrari 1545 seine Formel veröffentlicht hatte, bemühten sich die Mathematiker – insbesondere Euler und Lagrange – über 250 Jahre lang eine entsprechende Formel für die Gleichung 5. Grades zu finden. Erst 1824 zeigte Abel, daß Gleichungen von höherem als dem 4. Grad prinzipiell nicht mit Radikalen, d.h. mit Wurzeltermen zu lösen sind. Hier muß man stets zu Iterationsverfahren greifen.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm löst die allgemeine Gleichung 4. Grades nach dem Verfahren von Ferrari. Die dabei auftretende kubische Gleichung wird nach der Cardano-Formel von Programm 17 gelöst.

Als Beispiel wird die Gleichung

$$x^4 - 24x^3 + 150x^2 - 200x - 375 = 0$$

behandelt; sie ergibt sich in Programm 36 als charakteristisches Polynom der dort angegebenen Matrix.

Das Programm liefert die reellen Lösungen

$-1, +5, 0, 15$

```
10  REM "GLEICHUNG VIERTEN GRADES"
20 :
30 PI = 3.141592654
40  HOME : INVERSE
50  PRINT "                                  "
60  PRINT "     GLEICHUNG VIERTEN GRADES     "
70  PRINT "                                  "
80  PRINT " A*X^4 + B*X^3 + C*X^2 + D*X + E "
90  PRINT "                                  "
100  NORMAL : PRINT
110  INPUT "A, B, C, D, E ? ";A,B,C,D,E
120  PRINT
130  PRINT "LOESUNGEN:": PRINT
140  IF A = 0 THEN  PRINT "KEINE GLEICHUNG 4. GRADES": END
150  IF B = 0 AND D = 0 THEN 820
160 :
170  REM  KUBISCHE GLEICHUNG
180  GOSUB 330
190 :
200  REM  QUADRATISCHE GLEICHUNG
210 J = 8 * Y + B * B - 4 * C
220  IF  ABS (J) < 5E - 8 THEN J = 0
230 H1 =  SQR (J):G = H1
240 H = (B * H1 + J) / 2
250 I = Y * H1 + B * Y - D
260  GOSUB 630
270 :
280 H1 =  - H1:H = (B * H1 + J) / 2:G = H1
290 I = Y * H1 + B * Y - D
300  GOSUB 630
310  END
320 :
330  REM  KUBISCHE GLEICHUNG
340 A1 =  - C / 2:B1 = B * D / 4 - E:C1 = (E * (4 * C - B * B) - D * D) /
    8
350 P =  - A1 * A1 / 9 + B1 / 3
360 Q = A1 ^ 3 / 27 - A1 * B1 / 6 + C1 / 2
370  REM  KUBISCHE RESULTANTE
380 R = Q * Q + P ^ 3
390 :
400  ON  SGN (R) + 2 GOTO 530,480,420
410 :
```

```
420  REM   1 REELLE, 2 KOMPLEXE LOESUNGEN
430 U =  SQR (R) - Q:U =  SGN (U) *  ABS (U) ^ (1 / 3)
440 V =  -  SQR (R) - Q:V =  SGN (V) *  ABS (V) ^ (1 / 3)
450 Y = U + V - A1 / 3
460  RETURN
470 :
480  REM  REELLE DOPPELLOESUNG
490 U = ( - Q) ^ (1 / 3)
500 Y = 2 * U - A1 / 3
510  RETURN
520 :
530  REM  3 REELLE LOESUNGEN
540 X =  - Q /  SQR ( - P ^ 3)
550  REM  DEFINITION DES ARCCOS
560  DEF  FN AC(X) =  ATN ( SQR (1 - X * X) / X)
570  IF X > 0 THEN PHI =  FN AC(X): GOTO 600
580  IF X < 0 THEN PHI =  FN AC(X) + PI: GOTO 600
590 PHI = PI / 2
600 Y = 2 *  SQR ( - P) *  COS (PHI / 3) - A1 / 3
610  RETURN
620 :
630  REM  QUADRATISCHE GLEICHUNG
640 DI = H * H - 4 * G * I
650  IF DI < 0 THEN 740
660 :
670  REM  REELLE LOESUNG
680 X1 = ( - H +  SQR (DI)) / (2 * G)
690 X2 = ( - H -  SQR (DI)) / (2 * G)
700  PRINT X1: PRINT : PRINT X2
710  PRINT
720  RETURN
730 :
740  REM  KOMPLEXE LOESUNG
750 DI =  - DI
760  PRINT  - H / (2 * G);" + I*"; SQR (DI) / (2 * G)
770  PRINT
780  PRINT  - H / (2 * G);" + I*"; -  SQR (DI) / (2 * G)
790  PRINT
800  RETURN
810 :
820  REM  BIQUADRATISCHE GLEICHUNG
830 K = C * C - 4 * A * E
840  IF K < 0 THEN 1000
850 Y1 = ( - C +  SQR (C * C - 4 * A * E)) / (2 * A)
```

```
860 Y2 = ( - C -  SQR (C * C - 4 * A * E)) / (2 * A)
870  IF Y1 < Ø THEN 91Ø
88Ø  PRINT  SQR (Y1): PRINT
89Ø  PRINT  -  SQR (Y1): PRINT
9ØØ  GOTO 93Ø
91Ø  PRINT "I*"; SQR ( - Y1): PRINT
92Ø  PRINT "I*"; -  SQR ( - Y1): PRINT
93Ø  IF Y2 < Ø THEN 96Ø
94Ø  PRINT  SQR (Y2): PRINT
95Ø  PRINT  -  SQR (Y2): PRINT : GOTO 98Ø
96Ø  PRINT "I*"; SQR ( - Y2): PRINT
97Ø  PRINT "I*"; -  SQR ( - Y2): PRINT
98Ø  END
99Ø :
1ØØØ RE =  - C / (2 * A):IM =  SQR ( - K) / (2 * A)
1Ø1Ø BT =  SQR (RE * RE + IM * IM)
1Ø2Ø R1 =  SQR ((BT + RE) / 2):I1 =  SQR ((BT - RE) / 2)
1Ø3Ø BE =  SQR (R1 * R1 + I1 * I1)
1Ø4Ø R2 =  SQR ((BE + R1) / 2):I2 =  SQR ((BE - R1) / 2)
1Ø5Ø  PRINT R2;"*I"; - I2
1Ø6Ø  PRINT
1Ø7Ø  PRINT R2;"*I";I2
1Ø8Ø  PRINT
1Ø9Ø  PRINT  - R2;"I*"; - I2
11ØØ  PRINT
111Ø  PRINT  - R2;"I*";I2
112Ø  PRINT
113Ø  END
```

```
GLEICHUNG VIERTEN GRADES

A*X^4 + B*X^3 + C*X^2 + D*X + E


A, B, C, D, E ? 1,-24,150,-200,-375

LOESUNGEN:

4.999904

-.999999993

5.00009599

15
```

# 19. POLYNOMBERECHNUNG

Das folgende Programm bestimmt zu vorgegebenen Nullstellen das zugehörige Polynom.

Die Koeffizienten $a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ eines normierten Polynoms n-ten Grades

$$p(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_o$$

sind nach dem Satz von Vieta elementarsymmetrische Funktionen der Nullstellen $x_i$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots . + x_n = -a_{n-1}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}\, x_n = a_{n-2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \ldots + x_{n-2}\, x_{n-1}\, x_n = -a_{n-3}$$

.................................................

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots . \cdot x_n = (-1)^n \cdot a_o$$

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die Koeffizienten des gesuchten Polynoms nach oben genannten Formeln iterativ innerhalb zweier verschachtelter Schleifen

```
220 A(Ø) = Ø : A(N) = 1
230 FOR I=N TO 1 STEP -1
240 FOR J=H TO 1 STEP -1
250 A(N-J) = A(N-J) - A(N-J+1) * X(N-I+1)
260 NEXT J
270 NEXT I
```

Als Programmbeispiel wird das Polynom mit den Nullstellen

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5 \text{ und } x_6 = 6$$

gesucht. Es ergibt sich das Polynom

$$P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 72Ø.$$

Das Programm funktioniert nur für reelle Nullstellen. Für komplexe Nullstellen müssen die entsprechenden quadratischen Polynome multipliziert werden, dies kann mittels Programm 21 erfolgen.

```
10  REM  POLYNOMBERECHNUNG
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                          "
50  PRINT " POLYNOMBERECHNUNG "
60  PRINT "                          "
70  NORMAL : PRINT
80  INPUT "WIEVIELE NULLSTELLEN ? ";N
90  DIM A(N),X(N)
100 :
110  PRINT
120  FOR I = 1 TO N
130  PRINT I;".NULLSTELLE ";: INPUT X(I)
140 A(I) = 0
150  NEXT I
160 :
170  PRINT "                          "
180  NORMAL : PRINT
190 A(0) = 0:A(N) = 1
200  FOR I = N TO 1 STEP  - 1
210  FOR J = N TO 1 STEP  - 1
220 A(N - J) = A(N - J) - A(N - J + 1) * X(N - I + 1)
230  NEXT J
240  NEXT I
250 :
260  PRINT "DIE KOEFFIZIENTEN SIND:"
270  PRINT
280  FOR I = N TO 0 STEP  - 1
290  PRINT "A(";I;") = ";
300  IF A(I) >  = 0 THEN  PRINT " ";
310  PRINT A(I)
320  NEXT I
330  END
```

```
POLYNOMBERECHNUNG


WIEVIELE NULLSTELLEN ? 6

1.NULLSTELLE ?1
2.NULLSTELLE ?2
3.NULLSTELLE ?3
4.NULLSTELLE ?4
5.NULLSTELLE ?5
6.NULLSTELLE ?6


DIE KOEFFIZIENTEN SIND:

A(6) =  1
A(5) = -21
A(4) =  175
A(3) = -735
A(2) =  1624
A(1) = -1764
A(Ø) =  72Ø
```

# 20. KOMPLEXES HORNERSCHEMA

Mit Hilfe des Hornerschemas kann der Wert des Polynoms

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_o.$$

an der Stelle x ohne Potenzieren ausgewertet werden. Dies kann mit folgendem Programmstück geschehen

```
100 F = A(N)
110 FOR I=N-1 TO 0 STEP -1
120 F=F * X + A(I)
130 NEXT I
```

Dabei ist N der Polynomgrad und F der gesuchte Funktionswert. Das Hornerschema ist auch im Betriebssystem von CBM-Rechnern enthalten; mit ihm werden alle transzendenten Funktionen wie sin, arctan usw. über eine Polynomapproximation berechnet. Das angegebene Hornerschema kann auch für komplexe Zahlen angewendet werden. Dazu muß die komplexe Addition und Multiplikation geeignet sein. Sind die komplexen Zahlen als Zahlenpaare

(RE(1), IM(1)) (RE(2), IM(2))

gegeben, so kann die Addition wie folgt definiert werden

```
500 REM KOMPLEXE ADDITION
510 RE = RE(1) + RE(2)
520 IM = IM(1) + IM(2)
```

Entsprechend die Multiplikation

```
600 REM KOMPLEXE MULTIPLIKATION
610 RE = RE(1) * RE(2) - IM(1) * IM(2)
620 IM = RE(1) * IM(2) + RE(2) * IM(1)
```

Diese Rechenoperationen werden als Unterprogramm definiert und bei Bedarf angesprungen. Da jedoch in BASIC alle Variablen global sind, muß zuvor eine geeignete Parameterübergabe durchgeführt werden.

Da hier die komplexen Zahlen als Zahlenpaare behandelt werden, müssen entsprechend auch die Koeffizienten des Polynoms und der Argumentwert als Zahlenpaare eingelesen werden.

**Zum folgenden Programm**

Als Beispiel wird der Funktionswert des komplexen Polynoms

$$p(z) = (1 + 1.5i)z^3 - z^2 + 3z + (1 + 2i)$$

an der Stelle

$$z = 1 - i$$

berechnet. Die Koeffizienten werden im Programm mittels DATA-Werten eingelesen.
Es ergibt sich der Polynomwert

$$5-4i.$$

```
10  REM  KOMPLEXES HORNERSCHEMA
20  :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                          "
50  PRINT " KOMPLEXES HORNERSCHEMA "
60  PRINT "                          "
70  NORMAL : PRINT : PRINT
80  READ N: REM  POLYNOMGRAD
90  DIM R(N),I(N),RE(2),IM(2)
100 :
110  REM  EINLESEN DER KOEFFIZIENTEN
120  FOR K = N TO 0 STEP  - 1
130  READ R(K),I(K)
140  NEXT K
150 :
160  READ X,Y: REM  ARGUMENT
170 :
180  REM  HORNERSCHEMA
190 RE(1) = R(N):IM(1) = I(N)
200  FOR K = N - 1 TO 0 STEP  - 1
210 RE(2) = X:IM(2) = Y
220  REM  MULTIPLIKATION
230  GOSUB 430
240 RE(1) = RE:IM(1) = IM
250 :
260 RE(2) = R(K):IM(2) = I(K)
270  REM  ADDITION
280  GOSUB 380
290 RE(1) = RE:IM(1) = IM
300  NEXT K
310 :
320  REM  AUSGABE
330  PRINT "POLYNOMWERT = ";
340  IF IM(1) >  = 0 THEN  PRINT RE(1);" + I*";IM(1): GOTO 360
350  PRINT RE(1);" -I*"; ABS (IM(1))
360  END
370 :
380  REM  UNTERPROGRAMM KOMLEXADDITION
390 RE = RE(1) + RE(2)
400 IM = IM(1) + IM(2)
410  RETURN
420 :
```

```
430  REM  UNTERPROGRAMM KOMPLEXMULTIPLIKATION
440 RE = RE(1) * RE(2) - IM(1) * IM(2)
450 IM = RE(1) * IM(2) + RE(2) * IM(1)
460  RETURN
470 :
480  DATA  3
490  DATA  1,1.5,-1,0,3,0,1,2
500  DATA  1,-1
```

```
 KOMPLEXES HORNERSCHEMA


POLYNOMWERT = 5 -I*4
```

# 21. POLYNOM-MULTIPLIKATION

Zwei Polynome vom Grad n und m

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_o$$

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \ldots + b_o$$

werden multipliziert, indem man jeden Term des ersten Polynoms mit jedem des zweiten multipliziert.

Dies kann mit Hilfe zweier verschachtelter Schleifen geschehen

```
290 FOR I=0 TO N
300 FOR J=0 TO M
310 K = I + J
320 C(K) = C(K) + A(I) * B(J)
330 NEXT J
340 NEXT I
```

Das Verfahren läßt sich direkt auch auf Reihen übertragen; d.h. es liefert auch das Cauchy-Produkt zweier Reihenentwicklungen.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet nach dem angegebenen Verfahren das Produkt zweier Polynome und gibt die entsprechenden Koeffizienten aus.

Als Beispiel werden die Polynome

$$p(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 6x - 2 \quad - a_o$$

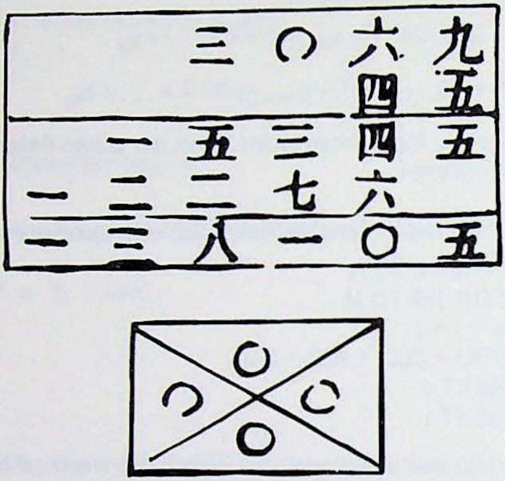
$$q(x) = x^2 - 1$$

multipliziert. Eingabe der Koeffizienten von links nach rechts ins Programm liefert die Koeffizienten des Produktpolynoms

1, –5,2, 11, –5, –6,2

Das Ergebnis ist somit

$$x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 11x^3 - 5x^2 - 6x + 2$$



"Darstellung des Polynoms
$2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0$
in Neue Schritte der Berechnung von Li Ye, China 1259"

```
10  REM  POLYNOM-MULTIPLIKATION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                          "
50  PRINT " POLYNOM-MULTIPLIKATION "
60  PRINT "                          "
70  NORMAL : PRINT
80 :
90  INPUT "GRAD DES 1.POLINOMS ? ";N
100  PRINT
110  DIM A(N)
120  FOR I = N TO 0 STEP  - 1
130  PRINT "KOEFFIZIENT VON X(";I;")";
140  INPUT A(I)
150  NEXT I
160 :
170  PRINT
180  INPUT "GRAD DES 2.POLYNOMS ? ";M
190  PRINT
200  DIM B(M),C(N + M)
210  FOR I = M TO 0 STEP  - 1
220  PRINT "KOEFFIZIENT VON X(";I;")";
230  INPUT B(I)
240  NEXT I: PRINT
250 :
260  FOR I = 0 TO M + N
270 C(I) = 0
280  NEXT I
290  FOR I = 0 TO N
300  FOR J = 0 TO M
310 K = I + J
320 C(K) = C(K) + A(I) * B(J)
330  NEXT J
340  NEXT I
350 :
360  REM  AUSGABE
370  PRINT "PRODUKTPOLYNOM:"
380  PRINT
390  FOR I = N + M TO 0 STEP  - 1
400  PRINT C(I);" ";
410  NEXT I
420  END
```

```
POLYNOM-MULTIPLIKATION


GRAD DES 1.POLINOMS ? 4

KOEFFIZIENT VON X(4)?1
KOEFFIZIENT VON X(3)?-5
KOEFFIZIENT VON X(2)?3
KOEFFIZIENT VON X(1)?6
KOEFFIZIENT VON X(Ø)?-2

GRAD DES 2.POLYNOMS ? 2

KOEFFIZIENT VON X(2)?1
KOEFFIZIENT VON X(1)?Ø
KOEFFIZIENT VON X(Ø)?-1

PRODUKTPOLYNOM:

1 -5 2 11 -5 -6 2
```

## 22. POLYNOM-DIVISION

Die Polynom-Division findet vielfache Anwendung beim Abdividieren von gefundenen Nullstellen, bei der Partialbruchzerlegung u.s.w.

Die Polynom-Division kann in völliger Analogie zur gewöhnlichen Division durchgeführt werden:
Es wird geprüft, wie oft der entsprechende Koeffizient des Divisors in den Dividenden hineingeht. Das entsprechende Vielfache des Divisors wird dann vom Koeffizienten des Dividenden subtrahiert.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm dividiert zwei Polynome nach dem gewöhnlichen Divisionsverfahren.
Es wurde versucht Rundungsfehler aufzufangen, indem sehr kleine Reste Null gesetzt werden. Die Polynomgrade und Koeffizienten werden in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel werden die Polynome

$$2x^7 + 9x^6 - 5x^5 + 42x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 21x - 8$$

$$x^3 + 5x^2 - 3x + 4$$

dividiert. Das Programm liefert den Quotienten

$$2x^4 - x^3 + 6x^2 + x - 7$$

mit dem Rest

$$24x^2 - 4x + 20$$

```
10  REM  POLYNOMDIVISION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                    "
50  PRINT " POLYNOMDIVISION "
60  PRINT "                    "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N
90  DIM A(N + 1),B(N + 1),Q(N + 1),R(N + 1)
100 :
110  FOR I = N + 1 TO 1 STEP  - 1
120  READ A(I): REM  DIVIDEND
130  NEXT I
140 :
150  READ M
160  FOR I = M + 1 TO 1 STEP  - 1
170  READ B(I): REM  DIVISOR
180  NEXT I
190 :
200  PRINT "DIVIDEND:     ";
210  FOR I = N + 1 TO 1 STEP  - 1
220  PRINT A(I);" ";
230  NEXT I: PRINT
240  PRINT
250  PRINT "DIVISOR:      ";
260  FOR I = M + 1 TO 1 STEP  - 1
270  PRINT B(I);" ";
280  NEXT I: PRINT
290 :
300 R = N - M
310  FOR I = N + 1 TO M + 1 STEP  - 1
320 Q(I - M) = A(I) / B(M + 1)
330  FOR J = 0 TO M
340 A(I - J) = A(I - J) - Q(I - M) * B(M + 1 - J)
350  IF  ABS (A(I - J)) >  =  ABS (Q(I - M) * B(M + 1 -
     J)) * 1E - 8 THEN 370
360 A(I - J) = 0
370  NEXT J
380  NEXT I
390 :
400  FOR I = R TO 1 STEP  - 1
410 R(I) = A(I)
```

```
420  NEXT I
430 :
440  PRINT
450  PRINT "QUOTIENT:    ";
460  FOR I = R + 1 TO 1 STEP  - 1
470  PRINT Q(I);" ";
480  NEXT I: PRINT
490 :
500  PRINT
510  PRINT "REST:          ";
520  IF R(R) = Ø THEN R = R - 1: GOTO 52Ø
530  FOR I = R TO 1 STEP  - 1
540  PRINT R(I);" ";
550  NEXT I
560  PRINT
570  END
580 :
590  DATA  7
600  DATA 2,9,-5 ,42,-24,1Ø,21,-8
610  DATA  3
620  DATA  1,5,-3,4
```

```
 POLYNOMDIVISION


DIVIDEND:    2 9 -5 42 -24 1Ø 21 -8

DIVISOR:     1 5 -3 4

QUOTIENT:    2 -1 6 1 -7

REST:        24 -4 2Ø
```

# 23. MATRIZEN-MULTIPLIKATION

Matrizen sind rechteckige Anordnungen von reellen Zahlen. Eine Matrix hat die Ordnung (m, n), wenn sie m Zeilen und n Spalten besitzt.

Zwei Matrizen **A** und **B** werden multipliziert, indem man jede Zeile von **A** mit jeder Spalte von **B** multipliziert. Dies zeigt, daß das Produkt von **A** und **B** nur existiert, wenn die Spaltenzahl von **A** mit der Zeilenzahl von **B** übereinstimmt. Ist **A** von der Ordnung (n, m) und **B** der Ordnung (p, q) mit m=p, so ist die Produktmatrix von der Ordnung (n, q).

Die Matrizenmultiplikation kann mit Hilfe von folgendem Programmstück durchgeführt werden

```
320 FOR I=1 TO N
330 FOR J=1 TO Q
340 S=0
350 FOR K=1 TO M
360 S=S + A(I,K) * B(K,J)
370 NEXT K
380 C(I,J) = S
390 NEXT J
400 NEXT I
```

**Zum folgenden Programm**

Das folgende Programm berechnet das Produkt zweier Matrizen, die in Form von DATA-Werten eingelesen werden. Dabei wird geprüft, ob die Spaltenzahl der ersten Matrix mit der Zeilenzahl der zweiten übereinstimmt, andernfalls wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

Im Programmbeispiel werden die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

miteinander multipliziert. Die Produktmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 1 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

(vgl. Programmausdruck).

```
10  REM  MATRIZENMULTIPLIKATION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " MATRIZEN-MULTIPLIKATION "
60  PRINT "                              "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N,M: REM  ORDNUNG DER 1.MATRIX
90  DIM A(N,M)
100  FOR I = 1 TO N
110  FOR J = 1 TO M
120  READ A(I,J)
130  NEXT J
140  NEXT I
150 :
160  READ P,Q: REM  ORDNUNG DER 2.MATRIX
170  DIM B(P,Q)
180  IF M = P THEN 220
190  PRINT "SPALTENZAHL DER 1.MATRIX MUSS MIT DER "
200  PRINT "ZEILENZAHL DER 2.MATRIX UEBEREINSTIMMEN": END

210 :
220  FOR I = 1 TO P
230  FOR J = 1 TO Q
240  READ B(I,J)
250  NEXT J
260  NEXT I
270 :
280  FOR I = 1 TO N
290  FOR J = 1 TO Q
300 S = 0
310  FOR K = 1 TO M
320 S = S + A(I,K) * B(K,J)
330  NEXT K
340 C(I,J) = S
350  NEXT J
360  NEXT I
370 :
380  PRINT "PRODUKTMATRIX:"
390  PRINT
400  FOR I = 1 TO N
410  FOR J = 1 TO Q
```

```
420  IF C(I,J) > = 0 THEN  PRINT " ";
430  PRINT C(I,J);" ";
440  NEXT J
450  PRINT
460  NEXT I
470  END
480 :
490  DATA  3,4
500  DATA  8,5,2,3
510  DATA  6,4,1,0
520  DATA  1,2,2,4
530 :
540  DATA  4,2
550  DATA  1,-2
560  DATA  -2,3
570  DATA  1,1
580  DATA  1,2
```

```
 MATRIZEN-MULTIPLIKATION


PRODUKTMATRIX:

 3  7
-1  1
 3  14
```

# 24. ZWEIERPOTENZEN VON MATRIZEN

Da für quadratische Matrizen die Zeilenzahl mit der Spaltenzahl übereinstimmt, können quadratische Matrizen mit sich selbst multipliziert werden.

Solche Potenzen von Matrizen haben zahlreiche Anwendungen in der numerischen und Wirtschaftsmathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Graphentheorie.

Als Beispiel werden hier die (homogenen) Markowketten herausgegriffen:
Hat ein System endlich viele Zustände und geht ein Zustand i, unabhängig von seinem vorhergehenden Zustand, in den Zustand j mit der Wahrscheinlichkeit

$p_{ij}$

über, so stellt das System eine Markowkette (auch Markoff geschrieben) dar. Die Matrix P mit den Elementen

$p_{ij}$

heißt eine stochastische Matrix. Solche Matrizen sind dadurch gekennzeichnet, daß ihre Zeilensumme den Wert 1 haben, da die Summe aller Übergangswahrscheinlichkeiten natürlich den Wert 1 hat.
Hat dieses System ein stationäres Verhalten, d.h. strebt es einer Grenzverteilung zu, so kann diese Grenzverteilung durch fortgesetztes Potentieren berechnet werden [10].
Multipliziert man die Matrix mit sich selbst und quadriert das jeweilige Ergebnis, so erhält man die Zweierpotenzen der Matrix.

**Zum folgenden Programm**

In einem bestimmten Land gebe es 3 Parteien A, B und C. Folgendes Wahlverhalten sei gegeben:
80% aller A-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder A, 10% B und 10% C.
70% aller B-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder B, 15% A und 15% C.
60% aller C-Wähler wählen bei der nächsten Wahl wieder C, 20% A und 20% B.

Damit ergibt sich folgende stochastische Matrix

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Wie man dem Programmausdruck entnimmt, nähern sich die Zeilen der Matrizenpotenzen dem Vektor

(0.461912194   0.307419108   0.230668699)

Dieser stellt die Grenzverteilung dar; d.h. auf lange Sicht wählen

| | | |
|---|---|---|
| 46.2 % | aller Wähler | A |
| 30.7 % | | B |
| 23.1 % | | C |

```
10  REM  ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX
20  HOME : INVERSE
30  PRINT "                              "
40  PRINT " ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX "
50  PRINT "                              "
60  NORMAL : PRINT
70 :
80  INPUT "WELCHE ZWEIERPOTENZ ? ";P
90 P =  LOG (P) /  LOG (2)
100 :
110  PRINT
120  INPUT "ORDNUNG DER MATRIX  ? ";N
130  PRINT
140  PRINT "GIB MATRIX ELEMENTWEISE EIN..."
150  PRINT
160  FOR I = 1 TO N
170  FOR J = 1 TO N
180  INPUT A(I,J)
190  NEXT J
200  NEXT I
210 :
220  FOR L = 1 TO P
230  PRINT
240  PRINT 2 ^ L;".POTENZ:"
250  FOR I = 1 TO N
260  FOR J = 1 TO N
270 S = 0
280  FOR K = 1 TO N
290 S = S + A(I,K) * A(K,J)
300  NEXT K
310 B(I,J) = S
320  IF S >  = 0 THEN  PRINT " ";
330  PRINT S;" ";
340  NEXT J: PRINT
350  NEXT I
360 :
370  REM  UMSPEICHERN
380  FOR I = 1 TO N
390  FOR J = 1 TO N
400 A(I,J) = B(I,J)
410  NEXT J
420  NEXT I
430  NEXT L
440  END
```

```
ZWEIERPOTENZ EINER MATRIX

WELCHE ZWEIERPOTENZ ? 16

ORDNUNG DER MATRIX  ? 3

GIB MATRIX ELEMENTWEISE EIN...

?.8
?.1
?.1
?.15
?.7
?.15
?.2
?.2
?.6

2.POTENZ:
 .675  .17  .155
 .255  .535  .21
 .31  .28  .41

4.POTENZ:
 .547Ø25  .2491  .2Ø3875
 .37365  .388375  .237975
 .4Ø775  .3173  .27495

8.POTENZ:
 .475442597  .297697678  .226859726
 .446546516  .319420823  .234Ø32661
 .453719452  .312Ø43548  .2342370Ø1

16.POTENZ:
 .461912194  .3Ø74191Ø8  .23Ø668699
 .461128662  .3Ø79939Ø5  .23Ø877434
 .461337397  .3Ø7836579  .23Ø826Ø25
```

## 25. MITTELWERTE

Neben dem arithmetischen Mittel A der Zahlen $x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

$$A = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots + x_n)$$

sind auch andere Mittelwerte von Bedeutung:

das geometrische Mittel

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

das harmonische Mittel

$$\frac{1}{H} = n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \ldots \frac{1}{x_n}\right)$$

das quadratische Mittel

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \ldots + x_n^2)}$$

Das meistgenutzte arithmetische Mittel ist sehr empfindlich gegen Ausreißer; d.h. bei kleinen Zahlenreihen wird das arithmetische Mittel durch einen zufällig großen Wert verfälscht. In diesem Fall sollte man lieber den Median (vgl. Programm 26) nehmen.

Das geometrische Mittel ist stets bei prozentualen Größen zu nehmen. Wird z.B. eine Gehaltserhöhung von 3% erst zum 1. Juni ausgezahlt, so ist die effektive Gehaltserhöhung nur

$$(\sqrt[12]{1.Ø3^7} - 1) \cdot 1ØØ\,\% = 1.7\,\%$$

Hier findet man häufig falsche Angaben, auch in angesehenen Tageszeitungen.

Fährt ein Auto eine Strecke bergauf mit 30 km/h und bergab mit 90 km/h, so ist die Durchschnittgeschwindigkeit keineswegs 60 km/h, sondern nur das harmonische Mittel von 45 km/h.

Für das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel gilt die Ungleichung von Cauchy

$$A \geq G \geq H$$

Das quadratische Mittel hat große Bedeutung in der Statistik, da die Standardabweichung einer Meßreihe gleich dem quadratischen Mittel der einzelnen Abweichungen ist.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet für beliebige Zahlenreihen das arithmetische, geometrische, harmonische und quadratische Mittel nach den oben angegebenen Formeln.

Als Beispiel wurde die Zahlenreihe:

19, 22, 2Ø, 18, 19, 23, 17, 21, 25, 17

eingegeben. Es ergeben sich folgende gerundete Mittel:

| | |
|---|---|
| arithmetisches M.: | 2Ø.1Ø |
| geometrisches M.: | 19.95 |
| harmonisches M.: | 19.8Ø |
| quadratisches M.: | 2Ø.26 |

```
10  REM  MITTELWERTE
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "             "
50  PRINT " MITTELWERTE "
60  PRINT "             "
70  NORMAL : PRINT
80  INPUT "WIEVIELE ZAHLEN ? ";N
90  PRINT
100 A = 0:G = 1
110 H = 0:Q = 0
120  FOR I = 1 TO N
130  PRINT I;".TE ZAHL ";: INPUT X
140 A = A + X
150 G = G * X
160  IF X = 0 THEN  PRINT : PRINT "HARMONISCHES MITTEL
      NICHT DEFINIERT"; CHR$ (7): END
170 H = H + 1 / X
180 Q = Q + X * X
190  NEXT I
200  PRINT
210 :
220 A = A / N
230 G = G ^ (1 / N)
240 H = N / H
250 Q =  SQR (Q / N)
260 :
270  PRINT "ARITHMETISCHES MITTEL= ";A
280  PRINT "GEOMETRISCHES MITTEL = ";G
290  PRINT "HARMONISCHES MITTEL  = ";H
300  PRINT "QUADRATISCHES MITTEL = ";Q
310  END
```

```
MITTELWERTE


WIEVIELE ZAHLEN ? 1Ø

1.TE ZAHL ?19
2.TE ZAHL ?22
3.TE ZAHL ?2Ø
4.TE ZAHL ?18
5.TE ZAHL ?19
6.TE ZAHL ?23
7.TE ZAHL ?17
8.TE ZAHL ?21
9.TE ZAHL ?25
1Ø.TE ZAHL ?17

ARITHMETISCHES MITTEL= 2Ø.1
GEOMETRISCHES MITTEL = 19.9481Ø92
HARMONISCHES MITTEL  = 19.8Ø12891
QUADRATISCHES MITTEL = 2Ø.2558634
```

# 26. STATISTISCHE MITTELWERTE

Neben dem arithmetischen Mittel werden in der Statistik auch noch andere Mittelwerte betrachtet.

Der Modus ist der häufigste Wert einer Stichprobe oder einer Meßwertreihe. Für Durchschnittslohnangaben ist sicher der Modus aussagekräftiger als der Mittelwert, der durch Bezieher sehr großer Einkommen verfälscht wird.

Denkt man sich alle Stichprobenwerte der Größe nach geordnet, so stellt das in der Mitte liegende Element den Median dar. Ist die Zahl der Werte gerade, so wählt man den Mittelwert der beiden mittleren Elemente zum Median; z.B. beim Stichprobenumfang 100 ist der Median das Mittel aus dem 50. und 51. Stichprobenwert. Der Median hat sehr große Bedeutung beim Testen auf vorgegebene Verteilungen (siehe z.B. [16]). Bei einer geringen Zahl von Stichprobenwerten ist das arithmetische Mittel besonders empfindlich gegen "Ausreißer". So verwendet die Stiftung Warentest als mittleren Preis eines Gerätes den Median, wenn weniger als 5 Geräte gekauft werden.

Weitere Parameter, die die Verteilung von Zahlen kennzeichnen, sind die Varianz, die Schiefe und der Exzeß.

Sind $x_i$ ($1 <= i <= n$) die Stichprobenwerte, so stellt

$$V = \frac{\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}}{n-1}$$

die Varianz dar. Sie ist ein Maß für die Streuung der Werte um ihren Mittelwert. Die Quadratwurzel aus der Varianz wird Standardabweichung $\sigma$ genannt. Im Falle einer Normalverteilung gibt letztere Zahl den Bereich um den Mittelwert an, in dem sich 65% aller Werte befinden.

Die Schiefe wird berechnet aus

$$\gamma = \left(\frac{\Sigma x_i^3}{n} - 3\,\frac{\Sigma x_i^2}{n} \cdot \frac{\Sigma x_i}{n} + 2\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^3\right) / \sigma^3$$

Sie ist ein Maß für die Symmetrie der Verteilung.

Der Exzeß

$$\epsilon = \left(\frac{\Sigma x_i^4}{n} - 4\,\frac{\Sigma x_i^3}{n} - \frac{\Sigma x_i}{n} + 6\,\frac{\Sigma x_i^2}{n}\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{\Sigma x_i}{n}\right)^4\right) / \sigma^4 - 3$$

(auch Wölbung genannt) ist ein Maß für die Steilheit der Kurve. Positiver Exzeß zeigt, daß die Verteilungskurve steiler als die Normalverteilung verläuft, negative Werte zeigen einen flacheren Verlauf. Für die Normalverteilung verschwindet sowohl Schiefe wie Exzeß.

**Zum folgenden Programm**

Gibt man die Stichprobenwerte in Form von DATA-Werten ein, so werden die oben genannten statistischen Kennwerte nach den angegebenen Formeln berechnet. Existieren zwei Werte mit gleich großer Häufigkeit, so wird der kleinere als Modus gewählt.

Für die Stichprobe

(18, 2Ø, 21, 19, 22, 23, 17, 21, 18, 24)

können die sich ergebenden Maßzahlen dem Programmausdruck entnommen werden.
Die Schiefe ist klein, da genau 5 Werte unter und 5 Werte über dem Mittel von 2Ø.3 liegen.
Der Exzeß ist negativ, dies zeigt eine flache Verteilung an.

```
10  REM  STATISTISCHE MITTELWERTE
20  :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " STATISTISCHE MITTELWERTE "
60  PRINT "                              "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N
90  DIM X(N),H(N)
100 :
110 M = 0:S = 0:T = 0:U = 0
120  FOR I = 1 TO N
130  READ X
140 M = M + X
150 S = S + X ^ 2
160 T = T + X ^ 3
170 U = U + X ^ 4
180 H(I) = 1:X(I) = X
190  NEXT I
200 A = M / N
210 :
220  REM  BUBBLESORT
230 F = 1
240  FOR I = 1 TO N - 1
250  IF X(I) <  = X(I + 1) THEN 280
260 H = X(I):X(I) = X(I + 1)
270 X(I + 1) = H:F = 0
280  NEXT I
290  IF F = 0 THEN 230
300 :
310  PRINT "MITTELWERT=";: HTAB 22: PRINT A
320 V = S / N - A ^ 2
330  PRINT "VARIANZ=";: HTAB 22: PRINT V
340 SG =  SQR (V)
350  PRINT "STANDARDABWEICHUNG=";: HTAB 22: PRINT SG
360 :
370 SF = (T / N - 3 * A * S / N + 2 * (A ^ 3)) / (SG ^
     3)
380  PRINT "SCHIEFE=";: HTAB 22: PRINT SF
390 :
400 E = (U / N - 4 * A * T / N + 6 * S * (A ^ 2) / N -
     3 * (A ^ 4)) / (SG ^ 4) - 3
```

```
410 :
420  PRINT "EXZESS(WOELBUNG)=";: HTAB 22: PRINT E
430 :
440  IF N / 2 <  >  INT (N / 2) THEN ME = X((N + 1) /
     2): GOTO 460
450 ME = (X(N / 2) + X(N / 2 + 1)) / 2
460  PRINT "MEDIAN=";: HTAB 22: PRINT ME
470 :
480  REM  FREQUENZZAEHLUNG
490  FOR I = 2 TO N
500  IF X(I) <  > X(I - 1) THEN 520
510 H(I) = H(I) + 1
520  NEXT I
530 K = 0
540  FOR I = 2 TO N
550  IF H(I) > H(I - 1) THEN K = I
560  NEXT I
570  PRINT "MODUS=";: HTAB 22
580  IF K <  > 0 THEN  PRINT X(K): END
590  PRINT "NICHT DEFINIERT"
600  END
610  DATA  10
620  DATA  18,20,21,19,22,23,17,21,18,24
```

```
 STATISTISCHE MITTELWERTE


MITTELWERT=          20.3
VARIANZ=             4.80999997
STANDARDABWEICHUNG=  2.19317121
SCHIEFE=             .127403993
EXZESS(WOELBUNG)=    -1.15515941
MEDIAN=              20.5
MODUS=               21
```

# 27. PYTHAGOREISCHE ZAHLEN

Ganzzahlige Lösungen $\neq 0$ der Diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

heißen pythagoreische Zahlen. Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn seine Seitenlängen pythagoreische Zahlen sind.

Setze man zwei solcher rechtwinkeligen Dreiecke mit gleicher Kathete zusammen, so erhält man ein Dreieck, dessen Höhe ganzzahlig ist. Die Seitenlängen eines solchen Dreiecks nennt man auch Heronsche Zahlen, da sie rationale Werte der Heronschen Flächenformel liefern.

Bekannte pythagoreische Tripel sind

(3, 4, 5)
(8, 6, 10)
(5, 12, 13)
(9, 12, 15)

Pythagoreische Zahlen können durch die Formeln

$$x = u^2 - v^2$$
$$y = 2uv$$
$$z = u^2 + v^2$$

erzeugt werden; dabei durchlaufen $u$ und $v$ alle natürlichen Zahlen. Die obengenannten Tripel erhält man für

$u = 2, \ v = 1$
$u = 3, \ v = 1$
$u = 3, \ v = 2$
$u = 4, \ v = 2$

Wie man an den Beispielen sieht, sind auch stets alle Vielfachen eines solchen Tripels wieder pythagoreisch. Im folgenden Programm werden daher nur teilerfremde Tripel erzeugt.

### Zum folgenden Programm

Das folgende Programm berechnet nach dem oben angegebenen Verfahren beliebig viele pythagoreische Zahlen, wobei Vielfache anderer Tripel ausgeschlossen werden.
Die ersten 20 vom Programm erzeugten Zahlentripel können dem Programmausdruck entnommen werden.

```
10  REM  PYTHAGOREISCHE ZAHLEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40 :
50  PRINT "                            "
60  PRINT " PYTHAGOREISCHE ZAHLEN "
70  PRINT "                            "
80  NORMAL : PRINT
90  INPUT "WEITER <RETURN>";T$
100  HOME
110 U = 2:Z = 1
120  GOSUB 420
130 :
140 V = U - 1
150 A = U * U - V * V
160 B = 2 * U * V
170 C = U * U + V * V
180  PRINT Z;: HTAB 8
190  PRINT A;: HTAB 16
200  PRINT B;: HTAB 24
210  PRINT C;
220  PRINT
230 Z = Z + 1
240  IF (Z - 1) / 10 <  >  INT ((Z - 1) / 10) THEN 320

250  PRINT
260  PRINT "WEITER <RETURN> ODER <E>NDE ?";
270  GET A$: IF A$ = "" THEN 270
280  IF A$ = "E" THEN  END
290  HOME
300  GOSUB 420
310 :
320 V = V - 2
330  IF V <  = 0 THEN U = U + 1: GOTO 140
340 V1 = V:U2 = U
350 N =  INT (U2 / V1)
360 U1 = U2 - N * V1
370  IF U1 <  > 0 THEN U2 = V1:V1 = U1: GOTO 350
380  IF V1 <  > 1 THEN 320
390  GOTO 150
400  END
410 :
```

```
420 PRINT "PYTHAGOREISCHE ZAHLEN"
430 PRINT "---------------------"
440 PRINT
450 PRINT "NR.    A      B      C"
460 PRINT
470 RETURN
```

```
 PYTHAGOREISCHE ZAHLEN


WEITER <RETURN>
PYTHAGOREISCHE ZAHLEN
---------------------

NR.    A      B      C

1      3      4      5
2      5      12     13
3      7      24     25
4      15     8      17
5      9      40     41
6      21     20     29
7      11     60     61
8      35     12     37
9      13     84     85
10     33     56     65

WEITER <RETURN> ODER <E>NDE ?
```

## 28. KOORDINATEN BESONDERER DREIECKSPUNKTE

Sind $\underline{p}1$, $\underline{p}2$, $\underline{p}3$ die Ortsvektoren der Dreiecks-Eckpunkte, so ergeben sich die Ortsvektoren der besonderen Dreieckspunkte aus folgenden Formeln:

Schwerpunkt

$$s = \frac{\underline{p}1 + \underline{p}2 + \underline{p}3}{3}$$

Inkreismittelpunkt

$$i = \frac{a_1\underline{p}1 + a_2\underline{p}2 + a_3\underline{p}3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

Höhenschnittpunkt

$$h = \frac{t_1\underline{p}1 + t_2\underline{p}2 + t_3\underline{p}3}{t_1t_2t_3}$$

Umkreismittelpunkt

$$u = \frac{c_1s_1\underline{p}1 + c_2s_2\underline{p}2 + c_3s_3\underline{p}3}{2\,s_1s_2s_3}$$

dabei stellen $a_1, a_2, a_3$ die Seitenlängen,
$s_1, s_2, s_3$ die Sinuswerte,
$c_1, c_2, c_3$ die Cosinuswerte,
$t_1, t_2, t_3$ die Tangenswerte

des Dreiecks dar.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die 4 besonderen Punkte eines Dreiecks nach den oben angegebenen Vektorgleichungen.
Als Programmbeispiel wird das räumliche Dreieck

(5 | Ø | –4), (–2 | 6 | 3), (6 | –3 | –5)

behandelt. Es ergeben sich folgende Werte,

Schwerpunkt:

(3 | 1 | –2)

Inkreismittelpunkt:

(4.60337933 | −0.50521699 | −3.60337933)

Höhenschnittpunkt:

(14.6 | 17.0666654 | −13.56)

Umkreismittelpunkt:

(−2.8 | −7.03333264 | 3.8)

Zur Kontrolle kann man den Satz anwenden, daß der Schwerpunkt die Strecke Umkreismittelpunkt – Höhenschnittpunkt im Verhältnis 1:2 teilt

$$s = \frac{1}{3}(2 \cdot u + h)$$

Dies ist, wie man leicht nachrechnet, erfüllt.

```
10  REM  KOORDINATEN V.BES. DREIECKSPUNKTEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " KOORDINATEN BESONDERER "
60  PRINT "                              "
70  PRINT "     DREIECKSPUNKTE       "
80  PRINT "                              "
90  NORMAL : PRINT
100  PRINT "GIB KOORD.DES 1.PUNKTS EIN ";: INPUT X(1),
     X(2),X(3)
110  PRINT "GIB KOORD.DES 2.PUNKTS EIN ";: INPUT Y(1),
     Y(2),Y(3)
120  PRINT "GIB KOORD.DES 3.PUNKTS EIN ";: INPUT Z(1),
     Z(2),Z(3)
130  PRINT
140 :
150  REM  SEITENVEKTOREN
160 P(1,1) = Y(1) - Z(1):P(1,2) = Y(2) - Z(2):P(1,3) =
     Y(3) - Z(3)
170 P(2,1) = Z(1) - X(1):P(2,2) = Z(2) - X(2):P(2,3) =
     Z(3) - X(3)
180 P(3,1) = X(1) - Y(1):P(3,2) = X(2) - Y(2):P(3,3) =
     X(3) - Y(3)
190 :
200  REM  SEITENLAENGEN
210  FOR I = 1 TO 3
220 S = 0
230  FOR J = 1 TO 3
240 S = S + P(I,J) ^ 2
250  NEXT J
260 A(I) =  SQR (S)
270  NEXT I
280 :
290  REM  COSINUSWERTE
300 C = 0
310  FOR I = 1 TO 3
320 C = C + P(2,I) * P(1,I)
330  NEXT I
340 C(3) =  - C / (A(1) * A(2)):C = 0
350  FOR I = 1 TO 3
360 C = C + P(3,I) * P(1,I)
```

```
370  NEXT I
380 C(2) =  - C / (A(1) * A(3)):C = Ø
390  FOR I = 1 TO 3
400 C = C + P(3,I) * P(2,I)
410  NEXT I
420 C(1) =  - C / (A(2) * A(3))
430 :
440  REM  SINUS- U. TANGENSWERTE
450  FOR I = 1 TO 3
460 S(I) =  SQR (1 - C(I) ^ 2)
470  IF C(I) = Ø THEN T(I) = 1E3Ø: GOTO 49Ø
480 T(I) = S(I) / C(I)
490  NEXT I
500 :
510  PRINT "SCHWERPUNKT:"
520  FOR I = 1 TO 3
530  PRINT (X(I) + Y(I) + Z(I)) / 3;" ";
540  NEXT I: PRINT : PRINT
550 :
560  PRINT "INKREISMITTELPUNKT:"
570 U = A(1) + A(2) + A(3)
580  FOR I = 1 TO 3
590  PRINT (A(1) * X(I) + A(2) * Y(I) + A(3) * Z(I)) /
     U;" ";
600  NEXT I: PRINT : PRINT
610 :
620 T = T(1) * T(2) * T(3)
630  IF T = Ø THEN 69Ø
640  PRINT "HOEHENSCHNITTPUNKT:"
650  FOR I = 1 TO 3
660  PRINT (T(1) * X(I) + T(2) * Y(I) + T(3) * Z(I)) /
     T;" ";
670  NEXT I: PRINT : PRINT
680 :
690 S = 2 * S(1) * S(2) * S(3)
700  IF S = Ø THEN 75Ø
710  PRINT "UMKREISMITTELPUNKT:"
720  FOR I = 1 TO 3
730  PRINT (C(1) * S(1) * X(I) + C(2) * S(2) * Y(I) +
     S(3) * C(3) * Z(I)) / S;" ";
740  NEXT I: PRINT : PRINT
750  END
```

```
KOORDINATEN BESONDERER

     DREIECKSPUNKTE


GIB KOORD.DES 1.PUNKTS EIN ?5,Ø,-4
GIB KOORD.DES 2.PUNKTS EIN ?-2,6,3
GIB KOORD.DES 3.PUNKTS EIN ?6,-3,-5

SCHWERPUNKT:
3 1 -2

INKREISMITTELPUNKT:
4.6Ø337933 -.5Ø521699 -3.6Ø337933

HOEHENSCHNITTPUNKT:
14.5999994 17.Ø666654 -13.5999996

UMKREISMITTELPUNKT:
-2.79999992 -7.Ø3333264 3.79999997
```

```
[illegible] PRINT
[illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible]
[illegible] NEXT [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible]
[illegible] IF [illegible]
[illegible]
[illegible] NEXT [illegible]
[illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] NEXT I: PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible] NEXT I: PRINT : PRINT
[illegible]
[illegible]
[illegible] IF [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible] NEXT I: PRINT : PRINT
[illegible]
[illegible]
[illegible] IF [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible] FOR [illegible]
[illegible] PRINT [illegible]
[illegible]
[illegible] NEXT [illegible]
[illegible] END
```

# 29. POLYGON-BERECHNUNG

Das folgende Programm berechnet Flächeninhalt und Umfang eines Vielecks bei bekannten Koordinaten der Eckpunkte. Der Flächeninhalt wird nach der Formel, vgl. [4]

$$A = [(x_1 + x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 - y_3) + \ldots$$
$$+ (x_n + x_1)(y_n - y_1)] / 2$$

berechnet.

Da der Abstand des Punktes $(x_{i+1} \mid y_{i+1})$ vom Punkt $(x_i \mid y_i)$ nach Pythagoras gleich

$$d = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

ist, ergibt sich der Umfang des Vielecks durch Aufsummieren der Abstände der einzelnen Eckpunkte.

Der Schwerpunkt ergibt sich aus

$$x_s = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)(x_i + x_{i+1}) \qquad \text{mit } x_{n+1} = x_1$$

$$y_s = \frac{1}{6A} \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)(y_i + y_{i+1}) \qquad y_{n+1} = y_1$$

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet für ein beliebiges Vieleck Umfang und Flächeninhalt. Bei der Eingabe der Koordinaten muß darauf geachtet werden, daß der Umlaufsinn eingehalten wird, da die Formel nicht für "überschlagene" Vielecke gilt.

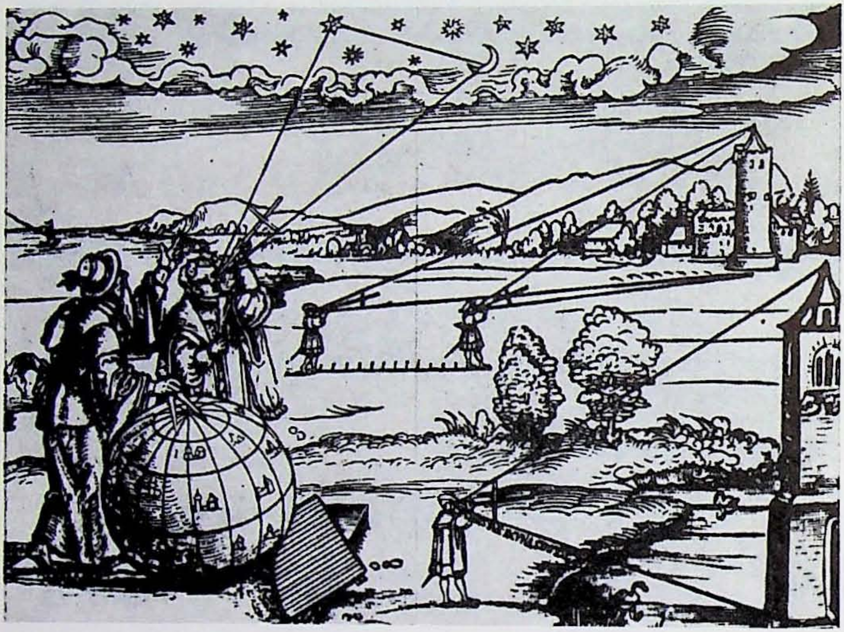
Als Programmbeispiel wird das Sechseck

(4 | 2), (1Ø | Ø), (12 | 9), (8 | 11), (3 | 5), (Ø | 3)

gewählt. Es ergibt sich

Flächeninhalt = 67
Umfang = 35.5551423

Schwerpunkt = (7.35323384 | 5.2Ø895523)



"Visieren von Winkeln mit Hilfe des Jakobstabs. Holzschnitt aus dem 16. Jahrhundert"

```
10  REM  POLYGON-BERECHNUNG
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                        "
50  PRINT " POLYGON-BERECHNUNG "
60  PRINT "                        "
70  NORMAL : PRINT
80 :
90  INPUT "WIEVIELE ECKPUNKTE ? ";N
100  DIM X(N + 1),Y(N + 1)
110 :
120  PRINT
130  PRINT "GIB KOORDINATEN DER ECKPUNKTE"
140  PRINT "IM GLEICHEN UMLAUFSSINN EIN !"
150  PRINT
160  FOR I = 1 TO N
170  PRINT "X(";I;"),Y(";I;") ";
180  INPUT X(I),Y(I)
190  NEXT I
200 :
210 X(N + 1) = X(1)
220 Y(N + 1) = Y(1)
230 :
240  REM  FLAECHENBERECHNUNG
250 F = 0
260  FOR I = 1 TO N
270 F = F + X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)
280  NEXT I
290 F =  ABS (F) / 2
300 :
310  REM  UMFANGSBERECHNUNG
320 U = 0
330  FOR I = 1 TO N
340 U = U +  SQR ((X(I + 1) - X(I)) ^ 2 + (Y(I + 1) -
     Y(I)) ^ 2)
350  NEXT I
360 :
370  REM  SCHWERPUNKTSKOORDINATEN
380 XS = 0:YS = 0
390  FOR I = 1 TO N
400 XS = XS + (X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)) * (X
     (I) + X(I + 1))
```

```
410 YS = YS + (X(I) * Y(I + 1) - X(I + 1) * Y(I)) * (Y
     (I) + Y(I + 1))
420  NEXT I
430 XS = XS / (6 * F)
440 YS = YS / (6 * F)
450 :
460  REM  AUSGABE
470  PRINT
480  PRINT "FLAECHENINHALT=";: HTAB 16: PRINT F
490  PRINT "UMFANG=";: HTAB 16: PRINT U
500  PRINT "SCHWERPUNKT:";: HTAB 16
510  PRINT "(";XS;" , ";YS;")"
520  END
```

```
 POLYGON-BERECHNUNG


WIEVIELE ECKPUNKTE ? 6

GIB KOORDINATEN DER ECKPUNKTE
IM GLEICHEN UMLAUFSSINN EIN !

X(1),Y(1) ?4,2
X(2),Y(2) ?10,0
X(3),Y(3) ?12,9
X(4),Y(4) ?8,11
X(5),Y(5) ?3,5
X(6),Y(6) ?0,3

FLAECHENINHALT=67
UMFANG=        35.5551423
SCHWERPUNKT:   (7.35323384 , 5.20895523)
```

# 30. DETERMINANTE

Determinanten haben zahlreiche Anwendungen: Mit ihrer Hilfe kann geprüft werden, ob

- Vektoren linear abhängig sind
- ein lineares Gleichungssystem lösbar ist
- zwei Polynome gemeinsame Nullstellen haben
- ein Extremum einer Funktion mehrerer Variablen vorliegt

usw.

Die Resultante der Polynome

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$$
$$g(x) = 6x^2 + 8x + 9$$

$$\mathrm{Det}\,(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

z.B. ist genau dann Null, wenn $f$ und $g$ mindestens eine gemeinsame Nullstelle haben. Hier gilt Det (f,g) = 2873, somit haben $f$ und $g$ keine gemeinsamen Nullstellen. Ersetzt man $g$ durch die Ableitung $f'$ von $f$, so gibt die Determinante Auskunft, ob $f$ mehrfache Nullstellen hat.

Erwähnenswert ist auch die Cramersche Regel, die erlaubt einzelne Unbekannte eines Gleichungssystems zu finden, ohne das ganze System lösen zu müssen. Ein Programm dazu findet sich in [15].

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die Determinante durch fortgesetztes Entwickeln nach der 1. Spalte.
Dazu werden die Zeilen 2 bis n mit dem Element $a_{11} \neq 0$ multipliziert. Dadurch vervielfacht sich zunächst der Wert der Determinante um

$$a_{11}^{\,n-1}$$

Der entsprechende Faktor wird sodann abdividiert. Subtrahiert man von jeder der Zeilen 2 bis n das

$a_{i1}$-fache von Zeile 1

so wird in der 1. Spalte der Vektor

(1 | Ø | Ø | . . . . | Ø)

erzeugt.

Entwickelt man nun nach der 1. Spalte, so verbleibt eine Determinante der Ordnung n–1.
Setzt man das Verfahren fort, so verringert sich die Ordnung der Determinante bei jedem Schritt, bis sie nur noch zweireihig ist. Im letzteren Fall kann der Wert leicht ermittelt werden.
Die Determinante wird im Programm in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

berechnet. Das Programm liefert den Wert –6.

```
10  REM  DETERMINANTE
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                    "
50  PRINT " DETERMINANTE "
60  PRINT "                    "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N: REM  ORDNUNG DER DETERMINANTE
90  DIM A(N,N),B(N,N)
100 :
110  PRINT "DETERMINANTE"
120  PRINT
130  FOR I = 1 TO N
140  FOR J = 1 TO N
150  READ A(I,J): PRINT A(I,J);" ";
160  NEXT J: PRINT
170  NEXT I
180 :
190 D = 1: REM  DETERMINANTE
200 M = N: REM  ZAEHLER
210 :
220  REM  PIVOTSUCHE
230 P = 0
240  IF  ABS (A(1,1)) > 1E - 5 THEN 400
250  FOR K = 2 TO M
260  IF  ABS (A(1,K)) <  =  ABS (A(1,K - 1)) THEN 280
270 P = A(1,K):L = K
280  NEXT K
290  IF P = 0 THEN D = 0: GOTO 610
300 :
310  REM  SPALTENTAUSCH
320  FOR J = 1 TO M
330 H = A(J = L)
340 A(J,L) = A(J,1)
350 A(J,1) = H
360  NEXT J
370 D =  - D
380 :
390  REM  ENTWICKLUNG NACH DER 1.SPALTE
400  FOR J = 2 TO M
410  FOR K = 2 TO M
420 A(J,K) = A(1,1) * A(J,K) - A(J,1) * A(1,K)
```

```
430  NEXT K
440  NEXT J
450 T =  SGN (A(1,1)) *  ABS (A(1,1) ^ (M - 2))
460 D = D / T
470  FOR J = 2 TO M
480  FOR K = 2 TO M
490 A(J - 1,K - 1) = A(J,K)
500  NEXT K
510  NEXT J
520 :
530 M = M - 1
540  IF M > 2 THEN 220
550 :
560  REM  ZWEIREIHIGE DETERMINANTE
570 D = D * (A(1,1) * A(2,2) - A(1,2) * A(2,1))
580 :
590  REM  AUSGABE
600  PRINT
610  PRINT "DETERMINANTE = ";D
620  END
630 :
640  DATA  6
650  DATA  1,2,3,4,5,6
660  DATA  2,2,3,4,5,6
670  DATA  3,3,3,4,5,6
680  DATA  4,4,4,4,5,6
690  DATA  5,5,5,5,5,6
700  DATA  6,6,6,6,6,6
```

```
 DETERMINANTE


DETERMINANTE

1 2 3 4 5 6
2 2 3 4 5 6
3 3 3 4 5 6
4 4 4 4 5 6
5 5 5 5 5 6
6 6 6 6 6 6

DETERMINANTE = -6
```

# 31. MÜLLER-ITERATION

Die Iteration ist eine Programmiermethode, bei der durch zahlreiche Iterationsschritte ein gesuchter Punkt immer näher eingekreist und schließlich mit der vorgegebenen Genauigkeit bestimmt wird.

Iterationsverfahren werden hauptsächlich zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen genutzt, da z.B. Nullstellen von Polynomen vom Grad >4 nicht mehr formelmäßig berechnet werden können. Iterationen finden jedoch auch Anwendung bei der Lösung von großen linearen Gleichungssystemen (z.B. beim Gauß-Seidel-Verfahren).

Ein einfaches Verfahren ist die sog. Fixpunkt-Iteration

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

Dabei wird der Graph der Funktion F(x) mit der Geraden y = x zum Schnitt gebracht.

Bei der Regula falsi

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

wird die Nullstelle der Verbindungsgerade zweier Graphenpunkte von f(x) bestimmt.

Bessere Konvergenz erzielt das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

bei dem jeweils die Nullstelle der Tangente bestimmt wird. Die Newton-Iteration läßt sich auf nichtlineare Systeme und somit auch auf komplexe Gleichungen ausdehnen (siehe Programm 33). Programme zu den erwähnten Iterationsverfahren finden sich z.B. in [15] und [17].

Die Müller-Iteration (1956) (in der englischsprachigen Literatur Muller genannt) kann als Verallgemeinerung der Regula falsi aufgefaßt werden. Im Gegensatz zu dieser wird durch 3 Kurvenpunkte eine Parabel gelegt und deren Nullstelle bestimmt. Die Bestimmung der Parabelgleichung erfolgt mittels Interpolation.

Sind $x_1$, $x_2$ und $x_3$ die 3 Kurvenpunkte bzw. die Startwerte, so berechnet man den nächsten Iterationswert aus

$$x = x_3 + I\,(x_3 - x_2)$$

Der Faktor $I$ berechnet sich aus dem Quotienten

$$I = \frac{-2Df(x_3)}{G \pm \sqrt{G^2 - 4DCf(x_3)}}$$

Die Konstanten ergeben sich aus

$$G = L^2 f(x_1) - D^2 f(x_2) + (L+D)\, f(x_3)$$

$$C = L\,(Lf(x_1) - D\,f(x_2) + f(x_3))$$

mit

$$L = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}$$

$$D = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}$$

Das Vorzeichen im Nenner von $I$ wird aus numerischen Gründen so gewählt, daß der Nenner möglichst groß wird.

Wegen der im Nenner auftretenden Wurzel könnte das Verfahren auch ins Komplexe gehen. Da die komplexe Newton-Iteration effektiver ist, ist das hier angegebene Müller-Verfahren auf das Reelle beschränkt.

**Zum folgenden Programm**

Die zu lösende nichtlineare Gleichung ist im Programm in Zeile 150 zu definieren. Der Startwert, die Abbruchgenauigkeit und die max. Zahl der Iterationen werden über INPUT eingegeben.
Liegt der Startwert in der Nähe der gesuchten Nullstelle, so ist die Konvergenz gut. Bei Funktionen, die keine reellen Nullstellen haben, kann die Iteration manchmal zwischen zwei Werten hin- und herpendeln und so Konvergenz vortäuschen. Zur Kontrolle wird daher im Programm noch der Funktionswert des letzten Iterationsschritts mit ausgedruckt.

Als Programmbeispiel wird das kubische Polynom

$$x^3 - x - 1$$

behandelt. Beim Startwert 1 ergibt sich in 5 Iterationsschritten die Nullstelle

$$x = 1.32471796$$

auf Maschinengenauigkeit. Der zugehörige Funktionswert ist

$$f(x) = -4.65661287 \cdot 1\emptyset^{-1\emptyset}$$

```
10 REM  MUELLER-INTERATION
20 :
30 HOME : INVERSE
40 PRINT "                        "
50 PRINT " MUELLER-INTERATION "
60 PRINT "                        "
70 PRINT "   F(X) = X^3-X-1      "
80 PRINT "                        "
90 NORMAL : PRINT
100 :
110 REM  DEFINIEREN DER FUNKTION IN 150
120 DEF  FN F(X) = X ^ 3 - X - 1
130 :
140 INPUT "STARTWERT                 ? ";X0
150 PRINT : INPUT "ABBRUCHGENAUIGKEIT    ? ";E
160 PRINT : INPUT "ZAHL DER INTERATIONEN ? ";N
170 PRINT
180 :
190 REM  STARTWERTE
200 K = 1:D = .5
210 X3 = X0: PRINT X0
220 X1 = X3 - D
230 X2 = X3 + D
240 :
250 REM  MUELLER-INTERPOLATION
260 IF X2 = X1 THEN X2 = X2 + 1E - 8
270 L1 = (X3 - X2) / (X2 - X1)
280 D1 = (X3 - X1) / (X2 - X1)
290 IF K > 1 THEN 320
300 E1 =  FN F(X1)
310 E2 =  FN F(X2)
320 E3 =  FN F(X3)
330 A1 = L1 ^ 2 * E1 - D1 ^ 2 * E2 + (L1 + D1) * E3
340 C1 = L1 * (L1 * E1 - D1 * E2 + E3)
350 B = A1 ^ 2 - 4 * D1 * C1 * E3
360 :
370 REM  INTERATION
380 IF B < 0 THEN B = 0
390 IF A1 < 0 THEN A1 = A1 -  SQR (B)
400 IF A1 > 0 THEN A1 = A1 +  SQR (B)
410 IF  ABS (A1) +  ABS (B) = 0 THEN A1 = 4 * D1 * E3
```

```
420  IF A1 = Ø THEN A1 = 1E - 8
430 L =  - 2 * D1 * E3 / A1
440 X = X3 + L * (X3 - X2)
450  PRINT X
460 :
470  REM  PRUEFEN AUF KONVERGENZ
480  IF  ABS (X - X3) < E *  ABS (X3) THEN 590
490  IF K < N THEN 520
500  PRINT
510  PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH";N;"INTERATIONEN": END
520 K = K + 1
530 X1 = X2
540 X2 = X3
550 X3 = X
560 E1 = E2:E2 = E3
570  GOTO 260
580 :
590  PRINT
600  PRINT "FUNKTIONSWERT = "; FN F(X3)
610  END
```

```
 MUELLER-INTERATION

   F(X) = X^3-X-1

STARTWERT               ? 1

ABBRUCHGENAUIGKEIT      ? 1E-8

ZAHL DER INTERATIONEN ? 50

1
1.31344632
1.32456943
1.32471808
1.32471796
1.32471796

FUNKTIONSWERT = -4.65661287E-10
```

# 32. MÜLLER-ITERATION (ZWEIDIMENSIONAL)

Die Müller-Iteration (Programm 31) läßt sich auch auf Funktionen

$$f(x, y)$$

zweier Variablen ausdehnen.

Dabei wird die x-y-Ebene in einfachen Müller-Iterationsschritten rechteckig in x- und y-Richtung durchlaufen

$$x = x_3 + l_1 (x_3 - x_2)$$

$$y = y_3 + l_2 (y_3 - y_2)$$

Das Verfahren bricht ab, wenn die Änderung der x- bzw. y-Werte die vorgegebene Abbruchgenauigkeit unterschreitet.

**Zum folgenden Programm**

Startwerte und Abbruchgenauigkeit werden mittels INPUT eingegeben. Das Programm ist gegen das Verschwinden des Nenners gesichert, jedoch nicht das Überschreiten des Wertebereichs (Overflow).

Als Beispiel wird die Funktion

$$f(x, y) = e^y - x^2 - 2$$

behandelt.

Für die Startwerte x=1, y=1 erhält man in 2 Schritten die Lösung

$$x = 0.847515091, y = 1$$

Analog liefern die Startwerte x=1, y=0 die Lösung

$$x = -1.15802104, y = 1.20627398$$

Da die Funktion unendlich viele Nullstellen hat, erhält man für verschiedene Startwerte wechselnde Lösungen. Sie erfüllen die Gleichung

$$y = \ln (x^2 + 2)$$

die man erhält, wenn man die gegebene Funktionsgleichung nach y auflöst.

```
10  REM  MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                                     "
50  PRINT " MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL "
60  PRINT "                                     "
70  PRINT "      F(X,Y) = EXP(Y) - X^2 - 2      "
80  PRINT "                                     "
90  NORMAL : PRINT
100 :
110  REM  FUNKTION IN ZEILE 700 EINGEBEN
120 :
130  INPUT "STARTWERTE X,Y          ? ";X0,Y0
140  INPUT "ABBRUCHGENAUIGKEIT      ? ";E
150  INPUT "ZAHL DER ITERATIONEN  ? ";N
160  PRINT
170 :
180  REM  ANFANGSWERTE
190 K = 1:B1 = .5:B2 = B1
200 :
210 X = X0:Y = Y0
220  PRINT X,Y
230 X3 = X0
240 X1 = X3 - B1
250 X2 = X3 + B1
260 :
270  REM  MUELLER-INTERPOLATION
280  IF X2 = X1 THEN X2 = X2 + 1E - 8
290 L1 = (X3 - X2) / (X2 - X1)
300 D1 = (X3 - X1) / (X2 - X1)
310 Y = Y0:X = X1
320  GOSUB 670:E1 = W
330 X = X2
340  GOSUB 670:E2 = W
350 X = X3
360  GOSUB 670:E3 = W
370  GOSUB 720
380 B1 = L * (X3 - X2)
390 X = X3 + B1
400 :
410  REM  PRUEFEN AUF KONVERGENZ
420  IF  ABS (B1) +  ABS (B2) < E THEN 830
```

```
430 XØ = X
440 Y3 = YØ
450 Y1 = Y3 - B2
460 Y2 = Y3 + B2
470  IF Y2 = Y1 THEN Y2 = Y2 + 1E - 8
480 L1 = (Y3 - Y2) / (Y2 - Y1)
490 D1 = (Y3 - Y1) / (Y2 - Y1)
5ØØ Y = Y1
510  GOSUB 67Ø:E1 = W
520 Y = Y2
530  GOSUB 67Ø:E2 = W
540 Y = Y3
550  GOSUB 67Ø:E3 = W
560  GOSUB 72Ø
570 B2 = L * (Y3 - Y2)
580 Y = Y3 + B2
590  IF  ABS (B1) +  ABS (B2) < E THEN 83Ø
6ØØ  IF K < N THEN 63Ø
610  PRINT
620  PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH ";N;" ITERATIONEN": END

630 K = K + 1
640 YØ = Y
650  GOTO 21Ø
660 :
670  REM  FUNKTIONSAUSWERTUNG
680 W =  EXP (Y) - X ^ 2 - 2
690  RETURN
7ØØ :
710  REM  HILFSPROGRAMM
720 A1 = L1 ^ 2 * E1 - D1 ^ 2 * E2 + (L1 + D1) * E3
730 C1 = L1 * (L1 * E1 - D1 * E2 + E3)
740 B = A1 ^ 2 - 4 * D1 * C1 * E3
750  IF B < Ø THEN B = Ø
760  IF A1 < Ø THEN A1 = A1 -  SQR (B)
770  IF A1 > Ø THEN A1 = A1 +  SQR (B)
780  IF  ABS (A1) +  ABS (B) = Ø THEN A1 = 4 * D1 * E3

790  IF A1 = Ø THEN A1 = 1E - 8
8ØØ L =  - 2 * D1 * E3 / A1
810  RETURN
820 :
830  PRINT : PRINT "FUNKTIONSWERT = ";
840 Y = Y3:X = X3: GOSUB 68Ø
```

```
850  PRINT W
860  END
```

```
 MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL

     F(X,Y) = EXP(Y) - X^2 - 2


STARTWERTE X,Y          ? 1,1
ABBRUCHGENAUIGKEIT      ? 1E-6
ZAHL DER ITERATIONEN    ? 30

1               1
.847515091      1

FUNKTIONSWERT = -9.31322575E-10
```

```
 MUELLER-ITERATION ZWEIDIMENSIONAL

     F(X,Y) = EXP(Y) - X^2 - 2


STARTWERTE X,Y          ? 1,0
ABBRUCHGENAUIGKEIT      ? 1E-6
ZAHL DER ITERATIONEN    ? 30

1               0
-.999999999     1.20627398
-1.15802104     1.20627398

FUNKTIONSWERT = 0
```

# 33. NEWTON-ITERATION IM KOMPLEXEN

Die Newton-Iteration im Reellen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

kann auch auf die komplexe Ebene ausgedehnt werden

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Um eine komplexe Arithmetik zu vermeiden, wird die Funktion f und ihre Ableitung f' in Real- und Imaginärteil zerlegt

$$f(z) = u + iv$$
$$f'(z) = u_x + iu_y$$

Damit erhält man

$$\frac{f}{f'} = \frac{u + iv}{u_x + iu_y} = \frac{uu_x + vu_y}{u_x^2 + u_y^2} + i\,\frac{vu_x - uu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

durch Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners. Dabei stellen

$u_x, u_y$

die partiellen Ableitungen von u nach x bzw. y dar. Trennt man Real- und Imaginärteil, so erhält man die komplexe Newton-Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{uu_x + vu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{vu_x - uu_y}{u_x^2 + u_y^2}$$

Polynome können mit Hilfe der binomischen Formel in Real- und Imaginärteil zerlegt werden. Z.B. gilt

$$\begin{aligned} z^3 + 1 &= (x + iy)^3 + 1 \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + 1 \end{aligned}$$

Dies liefert den Realteil $u = x^3 - 3xy^2 + 1$ und Imaginärteil $v = 3x^2\,y - y^3$.

Andere Funktionen können mit Hilfe eines geeigneten Tafelwerks zerlegt werden. Nach [4] gilt z.B.

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Dabei treten die hyperbolischen Funktionen sinh bzw. cosh auf.

**Zum folgenden Programm**

Der Realteil u bzw. Imaginärteil w der Funktion muß im Programm als Unterprogramm in den Zeilen 360 - 370 vereinbart werden. Die partiellen Ableitungen von u nach x und y folgen in den Programmzeilen 390 - 400.

Die Startwerte, die Abbruchgenauigkeit und die maximale Zahl der Iterationen wird über INPUT-Anweisungen eingegeben.

Als Programmbeispiel wird die Gleichung

$$z^3 + 1$$

gelöst. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ist

$$u = x^3 - 3xy^2 + 1, \quad v = 3x^2y - y^3$$

die partiellen Ableitungen von u nach x bzw. y sind

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \; u_y = -6xy$$

Eingabe der Startwerte x=1, y=1 liefert die Nullstelle

Ø.5 + i * Ø.866Ø254Ø3

Entsprechend liefern die Startwerte x=1, y=–1 die Nullstelle

Ø.5 – i * Ø.866Ø254Ø3

bzw. x=1, y=Ø die Nullstelle

–Ø.999999999 + i * Ø.

Die exakten Nullstellen sind hier

$$-1 \text{ und } \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

```
10  REM  NEWTON-VERFAHREN IM KOMPLEXEN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX "
60  PRINT "                              "
70  NORMAL : PRINT
80  INPUT "STARTWERTE                ? ";X0,Y0
90  INPUT "GENAUIGKEIT               ? ";E
100  INPUT "ZAHL DER ITERATIONEN ? ";N
110  PRINT
120 :
130  REM  ANFANGSWERTE
140 K = 0
150  PRINT X0,Y0
160 :
170  REM  ITERATION
180 K = K + 1
190 X = X0:Y = Y0
200  GOSUB 350
210 G = U1 ^ 2 + U2 ^ 2
220  IF G = 0 THEN  PRINT "GRADIENT IST NULLVEKTOR": END

230 X = X0 + (V * U2 - U * U1) / G
240 Y = Y0 - (V * U1 + U * U2) / G
250  PRINT X,Y
260 :
270  REM   KONVERGENZTEST
280  IF (X0 - X) ^ 2 + (Y0 - Y) ^ 2 < E ^ 2 THEN  END

290  IF K < N THEN 310
300  PRINT "KEINE KONVERGENZ NACH ";N;" ITERATIONEN": END

310 X0 = X
320 Y0 = Y
330  GOTO 180
340 :
350  REM  FUNKTIONSUNTERPROGRAMM
360 U = X ^ 3 - 3 * X * Y ^ 2 + 1
370 V = 3 * X ^ 2 * Y - Y ^ 3
380  REM  ABLEITUNGEN
390 U1 = 3 * X ^ 2 - 3 * Y ^ 2
```

```
400 U2 =  - 6 * X * Y
410  RETURN
```

```
 NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX


STARTWERTE               ? 1,1
GENAUIGKEIT              ? 1E-5
ZAHL DER ITERATIONEN ? 10

1                    1
.666666667           .833333333
.508691916           .841099874
.499329996           .866269171
.499999911           .866024903
.5                   .866025403

ÜRUN

 NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX


STARTWERTE               ? 1,-1
GENAUIGKEIT              ? 1E-5
ZAHL DER ITERATIONEN ? 20

1                    -1
.666666667           -.833333333
.508691916           -.841099874
.499329996           -.866269171
.499999911           -.866024903
.5                   -.866025403
```

```
NEWTON-VERFAHREN KOMPLEX

STARTWERTE              ? 1,Ø
GENAUIGKEIT             ? 1E-5
ZAHL DER ITERATIONEN ? 2Ø

1                Ø
.333333334       Ø
-2.77777777      Ø
-1.895Ø5185      Ø
-1.35618683      Ø
-1.Ø8535856      Ø
-1.ØØ6537Ø8      Ø
-1.ØØØØ4236      Ø
-1               Ø
-.999999999      Ø
```

## 34. NEVILLE-INTERPOLATION

Unter Interpolation versteht man Aufsuchen von Zwischenwerten einer tabellierten Funktion. Im Gegensatz dazu wird bei der Extrapolation ein Wert außerhalb des tabellierten Bereichs gesucht.

Sind die Funktionswerte Z(I) an den Stellen X(I) gegeben und soll an der Stelle X interpoliert werden, so läßt sich die Neville-Interpolation wie folgt beschreiben

```
260 FOR K=1 TO N
270 FOR I=K+1 TO N
280 IF I=N+1 THEN 330
290 Z(I) = (Z(I) * Y(K) – Z(K) * Y(I)) / (Y(K) – Y(I)
300 NEXT I
310 NEXT K
```

Dabei gilt

Y(I) = X – X(I)

N ist die Anzahl der vorgegebenen Funktionswerte, Z(N) der gesuchte, interpolierte Funktionswert.

Die in Programmzeile 290 auftretenden Differenzen heißen dividierte Differenzen. Mit ihrer Hilfe kann auch das Polynom vom Grad höchstens N–1 bestimmen, das durch die vorgegebenen Punkte geht. Ein Programm zur Newton-Interpolation findet sich in [17].

**Zum folgenden Programm**

Im Programm wird nach dem Neville-Verfahren im angegebenen Punkt interpoliert.

Folgende Funktionsstellen (x|y) seien gegeben:

(–4 | –26), (–1 | 4), (0 | 2), (2 | 16)

Gesucht werde der Funktionswert im Punkt x=1.

Das Programm liefert den Funktionswert

$f(1) = 4$

Das interpolierende Polynom ist hier

$p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

wie man leicht nachrechnet.

```
10  REM  NEVILLE-INTERPOLATION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                          "
50  PRINT " NEVILLE-INTERPOLATION "
60  PRINT "                          "
70  NORMAL : PRINT
80 :
90  INPUT "WIEVIELE STUETZSTELLEN ? ";N
100  DIM X(N),Y(N),Z(N)
110 :
120  PRINT
130  INPUT "X-WERT                  ? ";X
140 :
150  PRINT
160  FOR I = 1 TO N
170  PRINT "X(";I;"),Y(";I;")                 ";
180  INPUT " ? ";X(I),Y(I)
190 Z(I) = Y(I):Y(I) = X - X(I)
200  NEXT I
210 :
220  FOR K = 1 TO N
230  FOR I = K + 1 TO N
240  IF I = N + 1 THEN 290
250 Z(I) = (Y(K) * Z(I) - Y(I) * Z(K)) / (Y(K) - Y(I))

260  NEXT I
270  NEXT K
280 :
290  PRINT
300  PRINT "INTERPOL. WERT Y = ";Z(N)
310  END
```

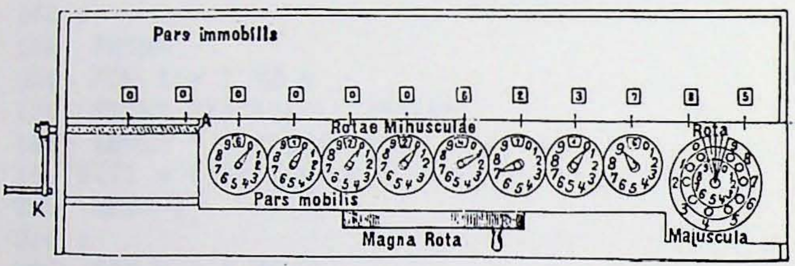
```
NEVILLE-INTERPOLATION

WIEVIELE STUETZSTELLEN ? 4

X-WERT                 ? 1

X(1),Y(1)              ? -4,-26
X(2),Y(2)              ? -1,4
X(3),Y(3)              ? Ø,2
X(4),Y(4)              ? 2,16

INTERPOL. WERT Y = 4
```




"Skizze der Rechenmaschine von Gottfried Leibniz (Entwurf 1673)"

# 35. GAUSS-JORDAN-VERFAHREN

Löst man im Gleichungssystem

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1} x \;\; + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n$$

die k-te Gleichung nach der Unbekannten $x_k$ auf, so erhält man

$$x_k = (-a_{k1} x_1 - a_{k2} x_2 - \ldots -a_{kn} x_n + b_k) / a_{kk}$$

Dies setzt voraus, daß das Diagonalelement $a_{kk} \neq 0$ ist. Ist $a_{kk} = 0$ oder sehr klein, so führt man eine entsprechende Spalten- oder Zeilenvertauschung durch. Findet sich keine Zeile oder Spalte, die ein Element $\neq 0$ liefert, so ist die entsprechende Matrix singulär, d.h. die Determinante der Matrix verschwindet und das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar.

Setzt man diese Unbekannte $x_k$ in alle anderen Gleichungen ein, so verschwindet sie aus diesen Gleichungen, d.h. sie wird eliminiert. Führt man dies für alle Unbekannten durch, so bleibt in der 1. Zeile nur noch die $x_1$, in der 2. noch $x_2$ und entsprechend in der k-ten Zeile $x_k$ übrig.

Man hat somit ein Gleichungssystem erhalten, in dem die Unbekannten nur noch in der Diagonale der Matrix stehen

$$\begin{array}{lllll} d_{11} x_1 & & & & = c_1 \\ & d_{22} x_2 & & & = c_2 \\ & & d_{33} x_3 & & = c_3 \\ & & \ddots & & \ldots \\ & & & d_{nn} x_n & = c_n \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann sehr einfach gelöst werden

$$x_k = \frac{c_k}{d_{kk}}; \; d_{kk} \neq 0$$

Lineare Gleichungssysteme finden zahlreiche Anwendungen bei

- Dimensionierung elektrischer Schaltkreise
- der Lösung von partiellen Differentialgleichungen
- Vektorrechnung
- Input- und Outputmodellen der Wirtschaft
- Ausgleichsrechnung
- elastische Verformungen von Fachwerken, Karrosserien

usw.

Zur Konstruktion eines Flugzeugflügels treten z.B. Gleichungssysteme mit mehr als 20.000 Unbekannten auf.

**Zum folgenden Programm**

Das Programm löst beliebige lineare Gleichungssysteme, bei denen die Zahl der Unbekannten mit der Zahl der Gleichungen übereinstimmt.
Gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen, so heißt das System unterbestimmt, im umgekehrten Fall überbestimmt. Zur Lösung von überbestimmten Gleichungssystemen, wie sie bei der linearen Regression auftreten, gibt es spezielle Verfahren wie z.B. die Methode der kleinsten Quadrate.

Als Programmbeispiel wird das Gleichungssystem mit 6 Unbekannten behandelt.

$$\begin{array}{rrrrrrcr}
6x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +x_4 & -x_5 & +x_6 & = & 11 \\
-3x_1 & -7x_2 & & +4x_4 & -2x_5 & +x_7 & = & -5 \\
4x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -x_4 & +2x_5 & +x_7 & = & 28 \\
2x_1 & +4x_2 & +5x_3 & -7x_4 & -3x_5 & +2x_7 & = & -6 \\
-x_1 & +5x_2 & -4x_3 & & +8x_5 & -2x_7 & = & 25 \\
3x_1 & & +4x_3 & -2x_4 & +5x_5 & -6x_7 & = & -4
\end{array}$$

Die Anzahl der Unbekannten und die Gleichungsmatrix mit rechter Seite wird im Programm in Form von DATA-Werten eingelesen.

Das Programm liefert hier die exakten Lösungen

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$ und $x_6 = 6$.

```
10  REM  GAUSS-JORDAN-VERFAHREN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " GRAUSS-JORDAN-VERFAHREN "
60  PRINT "                              "
70  NORMAL : PRINT
80  PRINT
90  PRINT "GLEICHUNGSSYSTEM:"
100  PRINT
110 :
120  READ N
130  DIM A(N,N + 1),X(N)
140 :
150  REM  EINLESEN DES GLEICHUNGSSYTEMS
160  FOR I = 1 TO N
170  FOR J = 1 TO N + 1
180  READ A(I,J)
190  IF A(I,J) >  = 0 THEN  PRINT " ";
200  PRINT A(I,J);" ";
210  NEXT J
220  PRINT
230  NEXT I
240 :
250  FOR K = 1 TO N
260  IF K = N THEN 390
270 G = A(K,K)
280 M = K
290  FOR I = K + 1 TO N
300  IF  ABS (A(I,K)) <  = G THEN 330
310 G =  ABS (A(I,K))
320 M = I
330  NEXT I
340  FOR J = K TO N + 1
350 H = A(K,J)
360 A(K,J) = A(M,J)
370 A(M,J) = H
380  NEXT J
390  IF  ABS (A(K,K)) <  = 1E - 8 THEN  PRINT "SINGULA
     ER": END
400  FOR I = 1 TO N
410  IF I = K THEN 460
```

```
420 F = A(I,K) / A(K,K)
430  FOR J = K + 1 TO N + 1
440 A(I,J) = A(I,J) - A(K,J) * F
450  NEXT J
460  NEXT I
470  NEXT K
480 :
490  REM  AUFLOESUNG
500  FOR I = 1 TO N
510 X(I) = A(I,N + 1) / A(I,I)
520  NEXT I
530 :
540  PRINT
550  PRINT "LOESUNG:"
560  PRINT
570  FOR I = 1 TO N
580  PRINT "X(";I;") = ";X(I)
590  NEXT I
600  END
610 :
620  DATA  6
630  DATA  6,-3,2,1,-1,1,11
640  DATA  -3,-7,0,4,-2,1,-5
650  DATA  4,-3,6,-1,2,1,28
660  DATA  2,4,5,-7,-3,2,-6
670  DATA  -1,5,-4,0,8,-2,25
680  DATA  3,0,4,-2,5,-6,-4
```

GRAUSS-JORDAN-VERFAHREN

GLEICHUNGSSYSTEM:

```
 6 -3  2  1 -1  1  11
-3 -7  Ø  4 -2  1 -5
 4 -3  6 -1  2  1  28
 2  4  5 -7 -3  2 -6
-1  5 -4  Ø  8 -2  25
 3  Ø  4 -2  5 -6 -4
```

LOESUNG:

```
X(1) = 1
X(2) = 2
X(3) = 3
X(4) = 4
X(5) = 5
X(6) = 6
```

## 36. MATRIZEN-INVERSION NACH FADDEJEW

Eine einfache Methode zur Invertierung einer quadratischen Matrix, die zugleich noch das charakteristische Polynom liefert, ist das Verfahren von Faddejew [9].

Ist die zu invertierende Matrix $\mathbf{A}_1$ von der Ordnung n, so wird iterativ die Matrix $\mathbf{A}_n$ in n–1 Schritten über die Gleichung

$$\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_i - c_i \mathbf{E})$$

berechnet; dabei ist $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix und $c_i$ = Spur $(\mathbf{A}_i)/i$. Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente.

Die gesuchte inverse Matrix ergibt sich dann aus

$$\mathbf{A}_1^{-1} = (\mathbf{A}_{n-1} - c_{n-1} \mathbf{E}) \frac{1}{c_n}$$

Der Wert $c_n$ liefert außerdem noch den Wert der Determinante

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A}) = (-1)^{n+1} c_n$$

Programme zu anderen Inversionsverfahren finden sich z.B. in [17].

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet die inverse Matrix nach dem angegebenen Verfahren. Die zu invertierende Matrix wird in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel soll die Inverse von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Das Programm liefert hier die exakte Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Matrizen-Multiplikation (Programm 23) kann geprüft werden, daß gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

```
10  REM   MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEW
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                                    "
50  PRINT " MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEW "
60  PRINT "                                    "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N: REM  ORDNUNG DER MATRIX
90  DIM A(N,N),A1(N,N),B(N,N),G(N,N),H(N,N)
100  PRINT "MATRIX:"
110  FOR I = 1 TO N
120 HT = 1
130  FOR J = 1 TO N
140  READ A(I,J):A1(I,J) = A(I,J)
150  HTAB HT
160  IF A(I,J) >  = 0 THEN  PRINT " ";
170  PRINT A(I,J);
180 HT = HT + 6
190  NEXT J
200  PRINT
210  NEXT I
220 :
230  FOR I = 1 TO N
240 S = 0
250  FOR J = 1 TO N
260 S = S + A(J,J)
270  NEXT J
280 C = S / I
290 :
300  FOR J = 1 TO N
310  FOR K = 1 TO N
320  IF J <  > K THEN H(J,K) = A(J,K): GOTO 340
330 H(J,J) = A(J,J) - C
340  NEXT K
350  NEXT J
360 :
370  IF I <  > N - 1 THEN 440
380  FOR J = 1 TO N
390  FOR K = 1 TO N
400 G(J,K) = H(J,K)
410  NEXT K
420  NEXT J
```

```
430 :
440  FOR J = 1 TO N
450  FOR K = 1 TO N
460 S = Ø
470  FOR L = 1 TO N
480 S = S + A1(J,L) * H(L,K)
490  NEXT L
500 B(J,K) = S
510  NEXT K
520  NEXT J
530 :
540  FOR J = 1 TO N
550  FOR K = 1 TO N
560 A(J,K) = B(J,K)
570  NEXT K
580  NEXT J
590  NEXT I
600 :
610  IF C = Ø THEN  PRINT : PRINT "MATRIX SINGULAER": END

620  PRINT
630  PRINT "INVERSE MATRIX:"
640  FOR I = 1 TO N
650 HT = 1
660  FOR J = 1 TO N
670 G(I,J) = G(I,J) / C
680  HTAB HT
690  IF G(I,J) > = Ø THEN  PRINT " ";
700  PRINT G(I,J);" ";
710 HT = HT + 6
720  NEXT J: PRINT
730  NEXT I
740 D = ( - 1) ^ (N + 1) * C
750  PRINT
760  PRINT "DETERMINANTE = ";D
770  END
780 :
790  DATA  4
800  DATA  5,7,6,5
810  DATA  7,1Ø,8,7
820  DATA  6,8,1Ø,9
830  DATA  5,7,9,1Ø
```

MATRIZENINVERSION NACH FADDEJEW

MATRIX:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 6 | 5 |
| 7 | 1Ø | 8 | 7 |
| 6 | 8 | 1Ø | 9 |
| 5 | 7 | 9 | 1Ø |

INVERSE MATRIX:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 68 | -41 | -17 | 1Ø |
| -41 | 25 | 1Ø | -6 |
| -17 | 1Ø | 5 | -3 |
| 1Ø | -6 | -3 | 2 |

DETERMINANTE = 1

# 37. CHARAKTERISTISCHES POLYNOM NACH FADDEJEW

Das charakteristische Polynom hat genau die Eigenwerte der Matrix als Nullstellen.

Eigenwerte $\lambda$ und Eigenvektoren $\mathbf{x}$ sind Lösung der Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{x}$$

Eigenwerte von Matrizen geben an

- Klassifikation von Flächen n-ter Ordnung
- Schwingungsfrequenzen eines Systems
- Kreiseleigenschaften von festen Körpern
- Stationäres Verhalten von Markow-Ketten

usw.

Wie beim vorhergehenden Programm entstehen beim Faddejew-Verfahren [9]

$$\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{A}_1 \, (\mathbf{A}_i - c_i \, \mathbf{E}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

die Koeffizienten $c_i$ aus

$$c_i = \text{Spur} \, (\mathbf{A}_i) \, / i$$

Versieht man die Werte $c_i$ mit alternierenden Vorzeichen, so erhält man die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Matrix. Bestimmt man die Nullstellen des Polynoms mit Hilfe der Programme 17, 18, 31, 32 oder 33, so erhält man die gesuchten Eigenwerte der Matrix.

Programme zu anderen Eigenwertverfahren, die auch gleichzeitig die Eigenvektoren bestimmen, finden sich in [17].

**Zum folgenden Programm**

Analog zum vorhergehenden Programm werden die Koeffizienten $c_i$ bestimmt und mit den richtigen Vorzeichen versehen. Die Matrix wird wieder in Form von DATA-Werten eingelesen.

Als Beispiel wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

behandelt. Das Programm liefert das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^4 - 24x^3 + 15\emptyset x^2 - 2\emptyset\emptyset x - 375$$

dessen Nullstellen bereits in Programm 18 bestimmt worden sind. Die Eigenwerte von **A** sind somit

$$\lambda_1 = -1 \;;\; \lambda_2 = 5 \;;\; \lambda_3 = -5 \;;\; \lambda_4 = 15.$$

```
10  REM   CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEW
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                                  "
50  PRINT " CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEW "
60  PRINT "                                  "
70  NORMAL : PRINT
80  READ N: REM  ORDNUNG DER MATRIX
90  DIM A(N,N),A1(N,N),B(N,N),G(N,N),H(N,N),C(N)
100  PRINT "MATRIX:"
110  FOR I = 1 TO N
120 HT = 1
130  FOR J = 1 TO N
140  READ A(I,J):A1(I,J) = A(I,J)
150  HTAB HT
160  IF A(I,J) >  = 0 THEN  PRINT " ";
170  PRINT A(I,J);
180 HT = HT + 6
190  NEXT J
200  PRINT
210  NEXT I
220  PRINT
230 :
240  FOR I = 1 TO N
250 S = 0
260  FOR J = 1 TO N
270 S = S + A(J,J)
280  NEXT J
290 C(I) = S / I
300 :
310  FOR J = 1 TO N
320  FOR K = 1 TO N
330  IF J <  > K THEN H(J,K) = A(J,K): GOTO 350
340 H(J,J) = A(J,J) - C(I)
350  NEXT K
360  NEXT J
370 :
380  IF I <  > N - 1 THEN 450
390  FOR J = 1 TO N
400  FOR K = 1 TO N
410 G(J,K) = H(J,K)
420  NEXT K
```

```
430  NEXT J
440 :
450  FOR J = 1 TO N
460  FOR K = 1 TO N
470 S = Ø
480  FOR L = 1 TO N
490 S = S + A1(J,L) * H(L,K)
500  NEXT L
510 B(J,K) = S
520  NEXT K
530  NEXT J
540 :
550  FOR J = 1 TO N
560  FOR K = 1 TO N
570 A(J,K) = B(J,K)
580  NEXT K
590  NEXT J
600  NEXT I
610 :
620  PRINT
630  PRINT "KOEFFIZIENTEN DES CHARAKT.POLYNOMS:"
640 S = 1
650  IF N / 2 =  INT (N / 2) THEN S =  - 1
660  PRINT  - S
670  FOR I = 1 TO N
680 C(I) = S * C(I)
690  PRINT C(I)
700  NEXT I
710  END
720 :
730  DATA  4
740  DATA  6,4,4,1
750  DATA  4,6,1,4
760  DATA  4,1,6,4
770  DATA  1,4,4,6
```

CHARAKT.POLYNOM NACH FADDEJEW

MATRIX:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 4 | 1 |
| 4 | 6 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 6 | 4 |
| 1 | 4 | 4 | 6 |

KOEFFIZIENTEN DES CHARAKT.POLYNOMS:

1
-24
15Ø
-2ØØ
-375

# 38. NUMERISCHE DIFFERENTIATION

Obwohl Funktionen – im Gegensatz zur Integration – analytisch differenziert werden können, ist dennoch das folgende Programm von Interesse, da es einen Überblick über Funktions- und Ableitungswerte im ganzen Intervall ermöglicht.

Das Programm benützt die 3-Punkte-Formeln zur Ableitung:

$$f'(x) = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{(f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{h^2}$$

Da die Formeln nach links "übergreifen", ist zu beachten, daß die Funktion auch links vom betrachteten Intervall definiert sein muß.

Da in BASIC die Verkettung von Funktionen implementiert ist, können die beiden Formeln direkt als Funktionen mittels

DEF FN. .

vereinbart werden.

Dazu muß nur in Zeile 15Ø die zu differenzierende Funktion als

DEF FNF(x) = . . .

definiert werden.

Das Intervall und die Schrittweite h werden über eine INPUT-Anweisung eingegeben. Wegen der unvermeidlichen Rundungsfehler werden alle Funktionswerte im Programm auf 4 Dezimale gerundet. Dies kann, wenn gewünscht, leicht geändert werden. Die Schrittweite zur Ausgabe ist im Programm mit Ø.1 vorgegeben (Zeile 28Ø), kann aber ebenfalls variiert werden.

**Zum folgenden Programm**

Als Programmbeispiel wird die Funktion

$$f(x) = x^2e^{-x} + \sin x$$

gewählt. Das Intervall soll [1,2], die Schrittweite Ø.1 sein. Wie man dem Programmausdruck entnimmt, wächst der Funktionswert bis x = 1.6 an und nimmt rechts davon wieder ab. Die Funktion hat somit zwischen 1.6 und 1.7 ein Maximum, wie es auch am Vorzeichenwechsel der 1. Ableitung erkennbar ist. Die 2. Ableitung ist im ganzen Intervall negativ, d.h. der Graph ist rechtsgekrümmt.

```
10  REM  NUMERISCHE DIFFERENTIATION
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                              "
50  PRINT " NUMERISCHE DIFFERENTIATION "
60  PRINT "                              "
70  NORMAL : PRINT
80 :
90  REM  DEFINIERE FUNKTION IN 150
100  DEF  FN F(X) = X ^ 2 *  EXP ( - X) +  SIN (X)
110  PRINT "FUNKTION: ";
120  PRINT "F(X)=X^2*EXP(-X)+SIN(X)"
130  PRINT
140 :
150  REM  ERSTE ABLEITUNG
160  DEF  FN A(X) =  - ( - 3 *  FN F(X) + 4 *  FN F(X +
     H) -  FN F(X + 2 * H)) / (2 * H)
170 :
180  REM  ZWEITE ABLEITUNG
190  DEF  FN B(X) = ( FN F(X) - 2 *  FN F(X + H) +  FN
     F(X + 2 * H)) / H ^ 2
200 :
210  INPUT "INTERVALL     ? ";A,B: PRINT
220  INPUT "SCHRITTWEITE ? ";H: PRINT
230 :
240  PRINT " X       F(X)       F'(X)      F"; CHR$ (34);"(
     X)"
250  FOR X = A TO B + 1E - 6 STEP .1
260 F =  INT ( FN F(X) * 1E4 + .5) / 1E4
270 A =  INT ( FN A(X) * 1E4 + .5) / 1E4
280 B =  INT ( FN B(X) * 1E4 + .5) / 1E4
290  IF X > = 0 THEN  PRINT " ";
300  PRINT X;: HTAB 7
310  IF F > = 0 THEN  PRINT " ";
320  PRINT F;: HTAB 17
330  IF A > = 0 THEN  PRINT " ";
340  PRINT A;: HTAB 27
350  IF B > = 0 THEN  PRINT " ";
360  PRINT B
370  NEXT X
380  END
```

NUMERISCHE DIFFERENTIATION

FUNKTION: F(X)=X^2*EXP(-X)+SIN(X)

INTERVALL ? 1,2

SCHRITTWEITE ? .1

| X | F(X) | F'(X) | F"(X) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.2094 | -.9106 | -1.2854 |
| 1.1 | 1.294 | -.7848 | -1.3399 |
| 1.2 | 1.3658 | -.6525 | -1.3735 |
| 1.3 | 1.4241 | -.5159 | -1.3885 |
| 1.4 | 1.4688 | -.3769 | -1.3867 |
| 1.5 | 1.4995 | -.2374 | -1.3699 |
| 1.6 | 1.5164 | -.0989 | -1.3396 |
| 1.7 | 1.5196 | .0372 | -1.2969 |
| 1.8 | 1.5094 | .1696 | -1.2431 |
| 1.9 | 1.4862 | .2971 | -1.1792 |
| 2 | 1.4506 | .4187 | -1.1062 |

# 39. NUMERISCHE INTEGRATION (TRAPEZREGEL)

Da viele Funktionen wie

$$\sin(x^2),\ e^{-x^2},\ \frac{\sin x}{x}$$

nicht analytisch integriert werden können, ist man hier auf numerische Integration angewiesen. Es gibt zahlreiche Integrationsmethoden. Ein bekanntes Verfahren ist die Trapezregel (auch Sehnentrapez-Regel) genannt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\,[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + .. + 2f(b-h) + f(b)]$$

mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$, n Zahl der Intervallunterteilungen.

Die Trapezregel eignet sich auch zur Extrapolation (siehe [33], [35], [36]). Weitere Programme zur numerischen Integration finden sich in [15] und [17].

**Zum folgenden Programm**

Das Programm berechnet das bestimmte Integral einer Funktion nach der angegebenen Trapezformel.

Die zu integrierende Funktion ist in Zeile 90 mittels

DEF FNF(X) = . . .

zu definieren. Die Intervallgrenzen a, b und Anzahl n der Unterteilungen werden über INPUT eingegeben.

Als Beispiel wird das Integral

$$\int_Ø^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

mit 5Ø Unterteilungen berechnet. Das Programm liefert

3.14152599

Vergleicht man dies mit dem exakten Wert

$\pi = 3.14159265$

so liefert dies den Fehler

$7 \cdot 10^{-5}$.

```
10  REM  NUMERISCHE INTEGRATION(TRAPEZREGEL)
20  HOME : INVERSE
30  PRINT "                    "
40  PRINT " TRAPEZREGEL "
50  PRINT "                    "
60  NORMAL : PRINT
70 :
80  REM  DEFINIEREN DER INTERGRANDENFUNKTION
90  DEF  FN F(X) = 4 / (1 + X * X)
100  PRINT "FUNKTION: ";
110  PRINT "F(X)=4/(1+X*X)"
120  PRINT
130 :
140  INPUT "INTERVALLGRENZEN    ? ";A,B
150  PRINT
160  IF A > B THEN H = A:A = B:B = H
170  INPUT "ZAHL DER INTERVALLE ? ";N
180  PRINT
190 :
200 I =  FN F(A) +  FN F(B)
210 H = (B - A) / N: REM  SCHRITTWEITE
220 :
230 S = 0
240  FOR K = 1 TO N - 1
250 S = S +  FN F(A + K * H)
260  NEXT K
270 I = I + 2 * S
280 I = I * H / 2
290 :
300  PRINT "INTERGRAL = ";I
310  END
```

```
 TRAPEZREGEL


FUNKTION: F(X)=4/(1+X*X)

INTERVALLGRENZEN    ? 0,1

ZAHL DER INTERVALLE ? 50

INTERGRAL = 3.14152599
```

# 40. HAMMING-VERFAHREN

Bekannte Verfahren zur Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die Verfahren von Runge-Kutta und Adams-Bashforth (siehe [33], [35], [37]. Programme dazu finden sich z.B. in [17].
Ein neueres Verfahren stammt von R.W. Hamming (1959) [12].

Die Differentialgleichung

$$y' = f(x,y)$$

mit dem Anfangswert

$$y(a) = y_\emptyset \text{ mit } x\epsilon\,[a,b]$$

habe die Lösungsfunktion u(x). Im folgenden wird

$$u(x_i) = u_i,\ f(x_i,\ u_i) = f_i$$

gesetzt. Das Hamming-Verfahren läuft wie folgt in 5 Schritten ab:

(1) Zunächst wird mit dem Prädiktor der Funktionswert

$$v_{i+1} = u_{i-3} + \frac{4}{3} h\ (2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$$

vorhergesagt.

(2) Dieser Prädiktorwert wird mittels des vorhergehenden Korrektorwerts $z_i$ modifiziert

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \frac{112}{121} (z_i - v_i)$$

(3) Für diesen modifizierten Wert wird die rechte Seite der Differentialgleichung bestimmt

$$w'_{i+1} = f(x_{i+1},\ w_{i+1})$$

(4) Der neue Korrektor lautet

$$z_{i+1} = \frac{1}{8} (9u_i - u_{i-2} + 3h\ (w_{i+1} + 2f_i - f_{i-1}))$$

(5) Der gesuchte Funktionswert $u_{i+1}$ wird schließlich mit Hilfe des Korrektors verbessert

$$u_{i+1} = z_{i+1} + \frac{9}{121} (z_{i+1} - v_{i+1})$$

Ist der rechte Rand des Integrationsintervalls [a, b] noch nicht erreicht, so wird x um die Schrittweite h erhöht und das Hamming-Verfahren erneut angewandt.

Wie man der Prädiktorformel entnimmt, benötigt man bei jedem Schritt die Kenntnis der Funktionswerte $f_i$, $f_{i-1}$ und $f_{i-2}$. Man sagt, das Verfahren ist dreifach zurückgreifend. Da aber nur der Startwert $u_\emptyset$ und somit auch $f_\emptyset$ bekannt ist, müssen die fehlenden Funktionswerte $f_1$, $f_2$ mit Hilfe eines anderen Verfahrens berechnet werden. Man wählt hier meist die Methode von Runge-Kutta.

**Zum folgenden Programm**

Als Beispiel soll die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y - 2x/y$$

mit dem Anfangswert $y(\emptyset) = 1$ im Intervall $[\emptyset,1]$ integriert werden.

Die Differentialgleichung wird in Zeile 710 in der Form

```
710 F = Y - 2 * X/Y
```

vereinbart. Das Intervall [a,b], der Anfangswert $y_\emptyset$ und die Schrittweite h werden in From von DATA-Werten eingelesen. Die numerische Lösung kann dem Programm-Ausdruck entnommen werden.

Zum Vergleich ist hier zusätzlich die exakte Lösung der Differentialgleichung

$$y = \sqrt{2x + 1}$$

ausgedruckt worden. Der relative Fehler am rechten Intervallrand ist somit

$$3.6 \cdot 1\emptyset^{-6}.$$

```
10  REM  HAMMING-VERFAHREN
20 :
30  HOME : INVERSE
40  PRINT "                        "
50  PRINT " HAMMING-VERFAHREN "
60  PRINT "                        "
70  NORMAL : PRINT
80 :
90  REM  EINGABE
100  PRINT "Y'=Y-2*X/Y": PRINT
110  READ A,B: REM  INTERVALLGRENZEN
120  READ Y: REM  ANFANGSWERT DER FUNKTION
130  READ H: REM  SCHRITTWEITE
140 :
150 X = A:Y(1) = Y
160  PRINT " X";: HTAB 9
170  PRINT "Y"
180 :
190  REM  STARTPROZEDUR NACH RUNGE-KUTTA
200  FOR I = 1 TO 3
210 T = Y
220  GOSUB 710
230 K(1) = F
240 H1 = H / 2
250 X = X + H1
260  FOR J = 1 TO 3
270 X = X +  INT (J / 3) * H1
280 Y = T + H1 * K(J) *  INT (J / 3 + 1)
290  GOSUB 710
300 K(J + 1) = F
310  NEXT J
320  REM  SCHRITTFUNKTION
330 Y = T + H / 6 * (K(1) + 2 * K(2) + 2 * K(3) + K(4)
    )
340 Y(I + 1) = Y
350  NEXT I
360  FOR I = 1 TO 3
370 X = A + I * H
380 Y = Y(I + 1)
390  GOSUB 710
400 F(I + 1) = F
410  GOSUB 780
```

```
420  NEXT I
430 :
440  REM  HAMMING-VERFAHREN
450 X = A + 4 * H:K = Ø:P1 = Ø
460  REM  PRAEDIKTOR
470 P = Y(1) + 4 / 3 * H * (2 * F(4) - F(3) + 2 * F(2)
    )
480  REM  MODIFIKATOR
490 M = P - 112 / 121 * (K - P1)
500 Y = M
510  GOSUB 710
520 M = F
530  REM
540 K = (9 * Y(4) - Y(2) + 3 * H * (M + 2 * F(4) - F(3
    ))) / 8
550  REM  SCHRITTFUNKTION
560 Y(5) = K + 9 / 121 * (K - P)
570  GOSUB 780
580 Y = Y(5)
590  GOSUB 710
600 F(5) = F:P1 = P
610  FOR I = 1 TO 4
620 Y(I) = Y(I + 1)
630 F(I) = F(I + 1)
640  NEXT I
650 X = X + H
660  IF X < B + H THEN 470
670 :
680  END
690 :
700  REM  UNTERPROGRAMM ZUR AUSWERTUNG DER DIFF.GLEICH
     UNG
710 F = Y - 2 * X / Y
720  RETURN
730 :
740  DATA  Ø,1
750  DATA  1
760  DATA  .1
770 :
780  REM  UNTERPROGRAMM ZUR AUSGABE
790  IF X >  = Ø THEN  PRINT " ";
800  PRINT X;
810  HTAB 8
820  IF Y >  = Ø THEN  PRINT " ";
```

```
830  PRINT Y
840  RETURN
```

HAMMING-VERFAHREN

Y'=Y-2*X/Y

| X | Y |
|---|---|
| .1 | 1.09544553 |
| .2 | 1.18321675 |
| .3 | 1.26491223 |
| .4 | 1.34156395 |
| .5 | 1.41410298 |
| .6 | 1.4831788 |
| .7 | 1.5491585 |
| .8 | 1.61243786 |
| .9 | 1.67331976 |
| 1 | 1.73205707 |

ANHANG A

# HISTORISCHE RECHENAUFGABEN

**Altbabylonische Keilschrifttafeln** (ca. 2000 v. Chr.)

1) Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche gemacht. Wiederum was die Länge über die Breite hinausgeht zur Fläche, habe ich addiert und (es ergibt) 183. Wiederum Länge und Breite addiert (gibt) 27. Länge, Breite und Fläche (ist) was?. *Lösung: (15, 12, 180) (14, 13, 182)*

2) 1/4 Breite und Länge sind 7 Handbreiten, Länge und Breite zusammen sind 10 Handbreiten. *Lösung (6,4)*

3) Die Fläche und die Seite des Quadrates habe ich addiert und 0,75 ist es. *Lösung: 1/2*

4) Ein Balken, 0,5 lang (steht senkrecht) an einer Wand. Oben ist er um 0,1 herabgekommen. Von unten (wie weit hat er sich entfernt)? *Lösung: 3/10*

5) Finde, wie lange es dauert, bis eine Geldsumme sich bei 1/5 Jahreszins verdoppelt. *Lösung: 3.801784*

**Papyrus Rhind** (ca. 1700 v. Chr.)

6) Haufen: sein Ganzes, 2/3 hinzu, (von der Summe) 1/3 hinweg, bleibt 30. *Lösung: 27*

7) 7 Häuser, in jedem 7 Katzen, jede frißt 7 Mäuse, jede von diesen 7 Ähren, von jeder Ähre könnte man 7 Scheffel Korn ernten, wieviele Dinge sind es insgesamt)? *Lösung: 19607*

8) Zu verteilen 100 Brote unter 5 Personen in arithmetischer Folge, daß 1/7 der Summe der drei ersten Anteile gleich der Summe der letzten drei Anteile ist. *Lösung: (38 1/3, 29 1/6, 20, 10 5/6, 1 2/3)*

9) Ein Quadrat und ein weiteres, dessen Seitenlänge 3/4 des ersten ist, bilden die Fläche 100. Wie lang ist die Seite des ersten? *Lösung: 8*

10) Haufen, 2/3 davon, 1/2 davon, 1/7 davon, zusammen genommen ergeben 33. *Lösung: 14 28/97*

**Anthologia Graeca** (ca. 500 n. Chr.)

11) Wieviele Äpfel werden gebraucht, wenn 4 von 6 Personen 1/3, 1/8, 1/4 und 1/5 jeweils vom Ganzen erhalten, während die 5. Person 10 Äpfel erhält und genau ein Apfel für die 6. Person übrig bleibt. *Lösung: 120*

12) Demarchos verlebte 1/4 seines Lebens als Junge, 1/5 als Heranwachsender, 1/3 als Mann und verbrachte 13 Jahre im Alter. Wie alt ist er geworden? *Lösung: 60*

13) Ziegelmacher, ich muß dringend an meinem Haus weiterbauen. Es ist schön heute und ich brauche nicht mehr als die üblichen 300 Ziegel. Du allein kannst soviele am Tage machen, dein Sohn 200 und dein Schwiegerson 250. Wenn ihr alle drei miteinander arbeitet, in welcher Zeit könnt ihr die geten Ziegel herstellen? *Lösung: 2/5*

14) Ich bin ein Löwe aus Erz; aus meinen Augen, aus meinem Mund und aus meiner rechten Fußsohle springen Fontänen hervor. Mein rechtes Auge füllt das Becken in 2 Tagen, das linke in 3 und mein Fuß in 4 Tagen. Wie lange dauerts, wenn alles vereint? *Lösung: 3 33/37*

**Algebra des al-Hwarizmi** (ca. 825 n. Chr.)

15) Ein Quadrat und zehn seiner Wurzeln sind gleich 39. *Lösung 3, –13*

16) Ein Quadrat und 21 sind gleich zehn seiner Wurzeln. *Lösung 3,7*

17) Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich den einen Teil durch den anderen geteilt und der Quotient war 4. *Lösung (8,2)*

18) Ich habe 10 in zwei Teile geteilt. Dann habe ich jeden Teil mit sich selbst multipliziert, das kleinere vom größeren abgezogen und der Rest war 40. *Lösung (7,3)*

**"Aufgaben zur Schärfung des Verstandes"** von Alkuin (ca. 790)

19) Wenn 100 Buschel Korn so auf 100 Leute verteilt werden, daß jeder Mann 3 Buschel, jede Frau 2 Buschel und jedes Kind 1/2 Buschel erhält, ist die Frage, wieviel Männer, Frauen und Kinder waren es?
*Lösung: (17, 5, 78) (14, 10, 76) (11, 15, 14) (8, 20, 72) (5, 25, 70)*

20) 30 Körbe, 10 davon voll, 10 halbvoll und 10 leer, sollen so unter drei Söhne verteilt werden, daß die Körbe und Inhalte gleich verteilt sind. Wie kann dies geschehen? *Lösung: z.B. 10 halbvolle*

21) Ein Hund jagt ein Kaninchen, das 150 Fuß Vorsprung hat. Der Hund springt immer 9 Fuß weit, wenn das Kaninchen 7 Fuß springt. Nach wieviel Sprüngen hat der Hund das Kaninchen eingeholt? *Lösung: 75*

22) Ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf müssen in einer Fähre einen Fluß überqueren, die außer dem Fährmann noch einen weiteren Gegenstand befördern kann. Wie muß der Fährmann sie über den Fluß bringen, damit weder der Wolf die Ziege noch die Ziege den Kohl frißt?

**Lilavati des Bhaskara II** (1150)

23) Das Quadrat aus 1/8 einer Herde Affen tummelt sich im Walde, während die übrigen zwölf auf dem Gipfel eines Hügels brüllen. *Lösung: 16, 48*

24) Jemand hat 300 Rupien und 6 Pferde. Ein anderer hat 10 Pferde vom gleichen Wert, aber eine Schuld von 100 Rupien. Beide haben dasselbe Vermögen. Was ist der Preis eines Pferdes? *Lösung: 57 1/7*

25) Schönes Mädchen mit den glitzernden Augen, sage mir, so du die richtige Kunst der Umkehrung verstehst: Welches ist die Zahl, die mit 3 vervielfacht, sodann um 3/4 des Produkts vermehrt, durch 7 geteilt, um ein Drittel des Quotienten vermindert, durch Ausziehung der Quadratwurzel, Addition von 8 und Division durch 10 die Zahl 2 hervorbringt? *Lösung: 28*

26) Von einem Schwarm Bienen läßt sich 1/5 auf einer Kadambablüte, 1/3 auf der Silindhablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten einer Kutuja, eine Biene blieb übrig, die in der Luft hin und her schwebt, gleichzeitig angezogen von dem lieblichen Duft einer Jasmine und eines Pandamus. Sage mir, reizendes Weib, die Anzahl der Bienen!
*Lösung: 15*

**Liber abaci des Leonardo von Pisa** (1202),

27) Jemand reist in Geschäften nach Lucca, von da nach Florenz und von da heim nach Pisa. In jeder Stadt verdient er so viel, daß sich sein Geld jeweils verdoppelt; in jeder Stadt gibt er aber auch 12 Denare aus. Nach der Heimkehr hat er nichts mehr. *Lösung: 10 1/2*

28) Erhält ein Mann vom zweiten 7 Denare, so hat er fünfmal so viel wie der zweite; erhält der zweite Mann vom ersten fünf Denare, so hat er siebenmal so viel wie der erste. Wieviel hatte jeder ursprünglich?
*Lösung: (12 7/17, 46 2/17)*

29) Ein König sandte 30 Mann in seinen Obstgarten um Bäume zu pflanzen. Wenn sie 1000 Bäume in 9 Tagen pflanzen können, wie lange würden 36 Mann für 4400 Bäume benötigen? *Lösung: 33*

30) Ein Mann hinterläßt seinem ältesten Sohn 1 Bezant und 1/7 des Verbleibenden. Von dem Rest gab er dem zweitältesten 2 Bezant und wieder 1/7 des verbleibenden Rests. Diese Teilung setzte er fort, er gab dem nächstjüngeren 1 Bezant mehr als dem vorhergehenden und je 1/7 des verbleibenden Rests. Wieviele Söhne waren es, wenn der letzte Sohn den Rest erhält, aber alle Söhne gleichviel? *Lösung: 6*

**Algorismus Ratisbonensis** (1450)

31) Item ain fraw hat veigen vnd hat auch kinder vnd sy gibt iglichen kind 12 veigen, so pleibt ir 37 feigen. Nu nympt sy dij veigen widerumb von den kindern vund gibt ander wais hyn vnd gibt iglichen kind 15 feigen, so zw rint (fehlen) ir 44 veigen. Nu frag ich, wije vil sind der feigen vnd der kinder gewesen? *Lösung: (361, 27)*

32) Item: diuidatur 8 in tales 2 partes, ut veniant in diuisione 3. (Teile 8 so in zwei Summanden, daß ihr Quotient 4 ist). *Lösung: (6 2/5, 1 3/5)*

33) Si tunc vixisses quantum vixisti et iterum tantum et dimidium et dimidium dimidij tanti, 100 annos compleuisses. (Wenn du noch solange leben würdest, wie du schon gelebt hast und nocheinmal so viel, und noch halb mal soviel und ein viertelmal soviel, so würdest du 100 Jahre alt werden). *Lösung: 26 2/3*

34) Item ein thurnn (Turm) ist 1/4 im ertrich (Erdreich) vnd 10 schuch im wasser vnd 3/5 ym luft. Nu frag ich, wye lang der thurnn seij vnd uil schuch im wasser sey vnd vieuil im luft. *Lösung: 66 2/3*

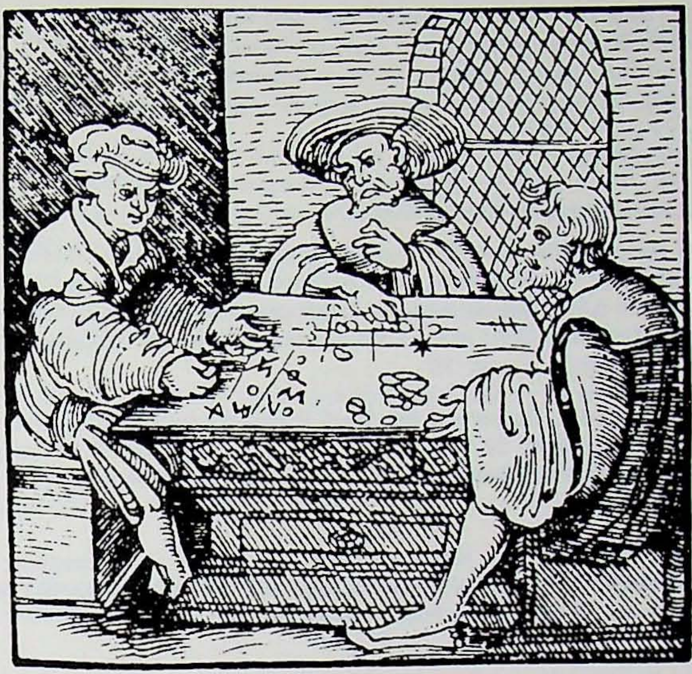
**Bamberger Rechenbuch** (1483)

35) Item ist ein Faß, das hat drei Zapfen. Wenn man den ersten zieht, geht es aus in 2 Tagen. Mit dem anderen Zapfen geht es aus in 3 Tagen. Mit dem dritten Zapfen geht es aus in 4 Tagen. Und wenn man sie alle drei zieht, wielange muß es ausrinnen? *Lösung: 12/13*

36) Es lauf ein Has gegen ein Holz und ein Hund lauf ihm hinten nach. Und wenn der Has 12 Sprünge tut, so tut der Hund 15, und der Has ist vor dem Hund 100 Schritt. Nun ist die Frag, wann der Hund den Hasen erläuft, in wieviel Schritten? *Lösung: 33 1/3*

37) Es sind zwei Gesellen, die gehen nach Rom. Einer geht alle Tage 6 Meilen. Der ander geht am ersten Tag 1 Meile, an dem anderen Tag 2, etc. Um alle Tag eine Meile mehr denn vorher. Nun willst du wissen, in wieviel Tagen einer soviel gegangen ist als der andere? *Lösung: 11*

38) Item ein Turm gebaut nach solchen Sitten: 1/4 des Turmes ist im Erdreich, 1/5 im Wasser und 100 Schuh in der Luft. Nun frag ich, wieviel Schuh sind im Wasser und Erdreich und wieviel Schuh sind an dem ganzen Turm? *Lösung: 181 9/11*



"Titelblatt von Adam Rieses Rechenbuch (2. Aufl. 1529). Es zeigt einen Wettbewerb zwischen einem Zahlen- und einem Linienrechner"

**Rechenbuch des Adam Riese** (1526)

39) Item ein kauffmann zeucht (verleiht) hinweg mit gelt / gewinnt ein drittheil seines Hauptguts (Kapital) / vnd 4 fl. mehr / legt an hauptgut vnd gewinn / gewinnt den vierdten theil / bringt zusammen 40. *Lösung: 21*

40) Item einer spricht zum andern / wann ich noch so vil / ein drittheil / vnd ein vierdtheil so viel hett / so wer meines gelts über 100 fl. so viel als jetzt darunder. *Lösung: 55 35/43*

41) Item ein fuhrmann fehrt von Leiptzig ghen Nürenberg in 6 tagen / vnd ein ander fuhrman fehrt desselbigen tags aus von Nürenberg / kompt in 8 tagen ghen Leiptzig / in wie vile tagen komen sie zusamen? *Lösung: 3 3/7*

42) Item 21 Personen / Männer und Frawen / haben vertrunken 81 d / ein Mann sol geben 5 d vnd eine Fraw 3 d. Nu frag ich wie viel jeglicher in sonderheit gewesen sind? *Lösung: (9, 12)*

43) Item einer hat zween silberne Becher / vnd ein oberlied (Deckel) / so dasselbig auff edn ersten gesetzt wirdt / helt er viermal des andern gewicht. Wirdt es aber auff den andern gesetzt / so ist er dreymal schwerer dann der erste / vnd das oberlied wigt 16 loth / wieviel wigt ein jeglicher Becher in sonderheit? *Lösung: (7 3/11, 5 9/11)*

**Algebra von Christopher Clavius** (1608)

44) Um seinen Sohn zum Rechnen zu ermuntern, zahlt ein Vater seinem Sohn 8 Pfennige für die Lösung einer Aufgabe, wenn sie richtig gelöst wurde und zieht ihm 5 Pfennige ab, wenn sie falsch war. Nach 26 Aufgaben schuldet weder der Vater dem Sohn etwas noch umgekehrt. Wieviele Aufgaben hat der Sohn richtig gelöst? *Lösung: 10*

45) Wenn ich jedem Bettler vor der Tür 7 Pfennige geben würde, würden mir 24 Pfennige verbleiben. 32 Pfennige würden fehlen um jedem 9 Pfennige geben zu können. Wieviele Bettler sind es und wieviel Geld habe ich? *Lösung: (28, 220)*

46) Einem Diener werden 100 Denare und ein Mantel als Jahresgehalt versprochen. Nach 7 Monaten verläßt der Diener das Haus und erhält 20 Denare und den Mantel. Wieviel ist der Mantel wert? *Lösung: 92*

**Vollständige Anleitung zur Algebra von Euler** (1770)

47) Ein Vater hinterläßt seinen 3 Söhnen ein Vermögen von 1600 Reichstalern. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rtl. mehr haben als der zweite, der zweite aber 100 Rtl. mehr als der dritte; wieviel bekommt jeder? *Lösung: (700, 500, 400)*

48) Suche ein Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie mit 5 multipliziert, das Produkt so viel unter 40 liegt, wie die Zahl selbst unter 12. *Lösung: 7*

49) Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wann ich die meinigen zu je 8 überzähle, so bleiben 7 übrig; die andere spricht: wann ich die meinigen zu je 10 überzähle, so bleiben mir auch 7 übrig; wieviel hat jede Eyer gehabt? *Lösung: (63, 37) (23, 77)*

50) Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirtshaus; ein Mann verzehrt 25 Cop., ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesamt einen Cop. mehr verzehrt haben als die Männer; wieviel Männer und Weiber sind es gewesen? *Lösung: (7 + 16 t, 11 + 25 t) t ganzzahlig*

# ZITATE

Wenn jemand die Mathematiker fragt: Ihr Wunderlichen – von was für Zahlen sprecht Ihr eigentlich – Was werden sie wohl antworten? daß sie von Zahlen reden, die man nur denken kann, unmöglich aber auf irgendeine andere Art handhaben.

*Plato*

Geometrie ist die Erkenntnis von Gegenständen ewigen Seines.

*Plato*

Wer die Geometrie begreift, vermag alles auf der Welt zu verstehen.

*Galilei*

Ceux qui ne sont pas mathematiciens sont portes a considerer les mathematiques comme une science inhumaine.

*E. Borel*

Gott existiert, wie die Mathematik widerspruchsfrei ist, der Teufel, weil wir es nicht beweisen können.

*A. Weil*

Die Zahl ist das Wesen aller Dinge.

*Pythagoras*

Ich hörte mich anklagen, als sei ich ein Feind der Mathematik überhaupt, die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt blieb.

*Goethe*

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: Redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es etwas ganz anderes.

*Goethe*

Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.

*Weierstraß*

Die Wissenschaft der reinen Mathematik in ihrer modernen Entwicklung darf von sich behaupten, die ureigenste Schöpfung des menschlichen Geistes zu sein.

*Whitehead*

Es gibt jedoch noch einen anderen Grund für die hohe Wertschätzung der Mathematik: sie allein bietet den exakten Naturwissenschaften ein gewisses Maß an Sicherheit, das ohne Mathematik nicht denkbar wäre.

*Einstein*

Zur Mathematik führt kein Königsweg.

*Menachmos*

Es gibt nichts Unpopuläreres als die moderne Mathematik, und auch darin steckt ein Stück Symbolik der unendlichen Ferne, der Distanz. Alle großen Werke des Abendlandes von Dante bis Parsifal sind unpopulär.

*Spengler*

Nicht etwa, daß bei größerer Verbreitung des Einblicks in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt werden würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.

*K. Menger*

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht — alles andere ist Menschenwerk.

*Kronecker*

Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer zu fassen.

*Dedekind*

Der Begriff der Mathematik ist der Begriff der Wissenschaft überhaupt. Alle Wissenschaften sollen daher Mathematik werden.

*Novalis*

Wer ein mathematisches Buch nicht mit Andacht ergreift und es wie Gottes Wort liest, versteht es nicht.

*Novalis*

Die Mathematik ist wie die Gottseligkeit, zu allen Dingen nütze, aber wie diese nicht jedermanns Sache.

*J. Kraus*

Ich glaube . ., daß es, im strengsten Verstand, für den Menschen nur eine einzige Wissenschaft gibt, und diese ist die reine Mathematik.

*Lichtenberg*

Die sogenannten Mathematiker von Profession haben sich, auf die Unmündigkeit der übrigen Menschen gestützt, einen Kredit von Tiefsinn erworben, der viel Ähnlichkeit mit dem vom Heiligen hat, den die Theologen für sich haben.

*Lichtenberg*

Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.

*d'Alembert*

So kann also die Mathematik definiert werden als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

*B. Russell*

Stets sind sie eilig, nur zu messen und zu rechnen, halten es für die Hauptsache, und le calcul! le calcul! ist ihr Feldgeschrei. Aber ich sage: ou le calcul commence, l'intelligence des phenomenes cesse: während Einer bloße Zahlen und Zeichen im Kopf hat, kann er nicht dem Kausalzusammenhang auf die Spur kommen.

*Schopenhauer*

Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit.

*G. Cantor*

Die Geometrie ist einzig und ewig, ein Widerschein aus dem Geiste Gottes, daß die Menschen an ihr teilhaben, ist eine Ursache dafür, daß der Mensch Ebenbild Gottes ist.

*Kepler*

Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen oft den Henker nicht.

*Lichtenberg*

Wer die Sicherheit der Mathematik verachtet, stürzt sich in das Chaos der Gedanken.

*da Vinci*

Befaßt Euch zuerst mit Mathematik, denn die Mathematik ist die Zahl, und die Zahl ist Gott.

*J.H. Fabre*

Die Natur ist mathematisch, die Meisterwerke der Kunst sind im Einklang mit der Natur; sie drücken die Naturgesetze aus und bedienen sich ihrer. Folglich ist das Kunstwerk mathematisch, und der Wissenschaftler kann das strengste Urteil anlegen und unfehlbare Formeln anwenden.

*Le Corbusier*

## LITERATURVERZEICHNIS

[1] Becker O.: Die Grundlagen der Mathematik, Freiburg, München 1964

[2] Becker O.: Zur Geschichte der griechischen Mathematik, Darmstadt 1965

[3] Bell E.T.: Die großen Mathematiker, Düsseldorf, Wien 1967

[4] Bronstein I.N./Semendjajew K.A.: Taschenbuch der Mathematik Zürich, Frankfurt/M. 1967

[5] Courant R./Robbins H.: Was ist Mathematik? Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962

[6] Davies P./Hersh R.: The Mathematical Experience Boston, Basel, Stuttgart 1981

[7] Dreszer J.: Mathematik-Handbuch, Zürich, Frankfurt/M., Thun 1975

[8] Engel A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt Stuttgart 1977

[9] Faddejew D.K./Faddejewa W.N.: Numerische Methoden der linearen Algebra, München, Wien 1973

[10] Ferschl F.: Markovketten, Berlin, Heidelberg, New York 1970

[11] Goldstine H.: The Computer from Pascal to von Neumann Princeton 1980

[12] Hamming R.W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers Tokyo, Düsseldorf, Johannesburg, London 1973

[13] Halder H./Heise W.: Einführung in die Kombinatorik München 1976

[14] Hardy G.H./Wright E.M.: Einführung in die Zahlentheorie München 1958

[15] Herrmann D.: Mathematik-Programme in BASIC, Köln 1982

[16] Herrmann D.: Wahrscheinlichkeitsrechnung/Statistik – 30 BASIC-Programme, Wiesbaden 1983

[17] Herrmann D.: Numerische Mathematik – 40 BASIC-Programme Wiesbaden im Druck

[18] Hoppe E.: Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum Wiesbaden 1966

[19] Jeger M.: Einführung in die Kombinatorik 1, Stuttgart 1973

[20] Karlson P.: Zauber der Zahlen, Frankfurt/M. 1965

[21] Kleine Enzyklopädie Mathematik, Thun, Frankfurt/M. 1977

[22] Menninger K.: Zahlwort und Ziffer, Göttingen 1979

[23] Meschkowski H.: Problemgeschichte der Mathematik I, II
Mannheim, Wien, Zürich 1979, 1981

[24] Meschkowski H.: Meyers Handbuch über die Mathematik
Mannheim, Wien, Zürich 1972

[25] Neugebauer O.: Vorgriechische Mathematik
Berlin, Heidelberg, New York 1969

[26] Otte M.: Mathematiker über Mathematik
Berlin, Heidelberg, New York 1974

[27] Popp W.: Wege des exakten Denkens, München 1981

[28] Scharlau W./Opolka H.: Von Fermat bis Minkowski
Berlin, Heidelberg, New York 1980

[29] Schneider E.: Mathematik ernst und heiter, Wiesbaden 1968

[30] Schubart H. Einführung in die klassische und moderne Zahlentheorie
Braunschweig 1974

[31] Smith D.E.: History of Mathematics II, New York 1958

[32] Steen L.A.: Mathematics Today, New York 1978

[33] Stoer J./Bulirsch R.: Einführung in die Numerische Mathematik I, II
Berlin, Heidelberg, New York 1972, 1973

[34] Struik D.J.: Abriß der Geschichte der Mathematik, Berlin 1976

[35] Stummel F./Hainer K.: Praktische Mathematik, Stuttgart 1971

[36] Toernig W.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker, I, II
Berlin, Heidelberg, New York 1979

[37] Tropfke J.: Geschichte der Elementarmathematik I
Berlin, New York 1980

[38] Wussing H.: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, Berlin 1979

[39] Wussing H./Arnold W.: Biographien bedeutender Mathematiker
Köln 1978

[40] van der Waerden B.L.: Erwachende Wissenschaft I
Basel, Stuttgart 1966

## BILDQUELLENNACHWEIS

| | |
|---|---|
| Aulis Verlag | Seite 120 |
| Bibliographisches Institut AG | Seite 90 |
| Deutsches Museum, Bildstelle B IV | Seiten 16, 17 |
| Niedersächsische Landesbibliothek | Seite 178 |
| Vandenhoeck & Ruprecht | Seiten 12, 15 |

Im übrigen danken wir den Verlagen für die freundliche Unterstützung.


Programme reichen von stöchiometrischen Berechnungen bis zur Elementedatei. Besonders genutzt werden die grafischen Möglichkeiten. Die Anwendungsbeispiele gehen von Strukturformeln, grafischen Darstellungen von Versuchsanordnungen und Funktionen bis zur 3-D Grafik im Detail.

In Vorb. Aug. 1984. Ca. 220 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 48,–/ca. Fr. 48.–/ca. S 432,–**
**ISBN 3-88322-037-X**


Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen: Mehrregister-Arithmetik – Zahlentheorie – Kombinatorik – Algebra – Geometrie – numerische Mathematik. Neu ist die Langzahl-Arithmetik. Sie gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen.

In Vorb. Juni 1984. 250 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 42,–/ca. Fr. 42.–/ca. S 378,–**
**ISBN 3-88322-036-1**


Diese Sammlung enthält 40 BASIC-Programme für den Apple II/IIe aus den Bereichen Finanzmathematik, Unternehmensforschung und Betriebswirtschaft. Wirtschaftliche Fragestellungen treffen jeden von uns, entweder als Steuerzahler, Sparer oder Kreditnehmer. Zahlreiche Beispiele erläutern die vollständigen Programme.

1983. 200 Seiten. **Kart. DM 38,–/Fr. 38.–/S 342,–**
**ISBN 3-88322-035-3**


LOGO besitzt wichtige Eigenschaften moderner Programmiersprachen. Wesentlich bei LOGO ist die ›Igel-Grafik‹. Mit einfachen Befehlen und Programmen können komplexe Zeichnungen erstellt werden. LOGO ist eine interpretierende Sprache, so können alle Funktionen und Programme ohne Wartezeit ausgeführt werden.

1983. 186 Seiten. **Spiralh. DM 42,–/Fr. 42.–/S 378,–. ISBN 3-88322-023-X**


Der Apple Software-Wegweiser wendet sich in erster Linie an die Besitzer von Apple-Computern, die nach geeigneten Programmen für ihre Anwendung suchen. Aber auch Händler, die ihre Kunden gezielt beraten wollen, werden auf ihn nicht verzichten.

1983. 304 Seiten. **Kart. DM 42,–/Fr. 42.–/S 378,–. ISBN 3-88322-028-0**


Dies ist die umfassendste Sammlung deutscher und internationaler Hardwarezusätze und Peripherie-Erweiterungen für Apple-Computer. Sie wendet sich an Anwender von Apple-Computern, die nach Erweiterungen ihrer Systeme suchen. Unersetzlich ist sie auch für alle Händler, die ihre Kunden gezielt beraten wollen.

Herausgeber Armin P. Landsberg. 1983. 272 S. **Kart. DM 42,–/Fr. 42.–/S 378,–**
**ISBN 3-88322-025-6**


Dieses Buch beschreibt an Beispielen aus der Praxis das Arbeiten mit dem wohl meistbenutzten Datenbanksystem der Welt. Es werden keine Vorkenntnisse vorausgesetzt, sondern es wird Schritt für Schritt das komplette Wissen vermittelt, das man zum Arbeiten mit einer Datenbank braucht.

1984. 226 Seiten.
**Geb. DM 56,–/Fr. 56.–/S 498,–**
**ISBN 3-88322-038-8**


Das Buch, auch als Einstieg in das Programmieren geeignet, zeigt dBase II als mächtige Programmiersprache für die Datenbankanwendung. Inhalt: Was ist eine Datenbank? Warum dBase II? Wie wird programmiert? Einführung: Autokostenverwaltung; für Fortgeschrittene: Literaturverwaltung, kommentierte Listings, Tips und Tricks.

In Vorb. Juli 1984. Ca. 240 Seiten. **Geb. Ca. DM 56,–/ca. Fr. 56,–/ca. S 498,–**
**ISBN 3-88322-039-6**


Teil 1 gibt eine Einführung in die Grundlagen: Sprachinterpreter und Compiler werden erläutert. Teil 2 enthält eine umfassende Beschreibung aller Anweisungen, Befehle und Funktionen, abgerundet mit zahlreichen Beispielen. Teil 3 enthält eine Zusammenstellung aller Befehle mit ihrer Syntax, weitere Beispiele und Tabellen.

In Vorb. April 1984. Ca. 300 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 58,–/ca. Fr. 58.–/ca. S 522,–.**
**ISBN 3-88322-073-6**


Dieses Buch enthält 30 Programme aus den Arbeitsbereichen: Suchen – Schreiben – Rechnen – Sortieren. Sie sind an keinen Rechner gebunden, da sie unter CP/M und MBasic geschrieben sind. Sie entstanden aus der praktischen Arbeit und haben sich bereits bewährt. Auch der ›Newcomer‹ kann sie ohne Schwierigkeiten einsetzen.

1983. 168 Seiten. **Spiralh. DM 40,–/Fr. 40.–/S 360,–. ISBN 3-88322-031-0**


Dieses Buch umfaßt 34 Programme und Routinen aus den Arbeitsbereichen: Suchen – Schreiben – Rechnen – Sortieren – Statistik. Die Programme sind unter CP/M in MBasic geschrieben und können somit leicht auf andere Rechner umgesetzt werden.

1983. 192 Seiten. **Spiralh. DM 40,–/Fr. 40.–/S 360,–**
**ISBN 3-88322-042-6**


Mit dem von der Beratungsfirma Interplamar entwickelten Buch kann der Manager den EDV-Ablauf des Betriebes schnell beherrschen. Das Manual ist durch die Arbeitsblätter in allen Bereichen einsetzbar.

1981. 222 S. Zahlr. Abb. u. Organisationsschemata. **Geb. DM 128,–/Fr. 98.–/S 1152,–. ISBN 3-88322-019-1. RingO. DM 158,–/Fr. 128.–/S 1422,–.**
**ISBN 3-88322-020-5.** Zusätzl. Arbeitsblätter u. Organisationsformulare. **DM 48,–/Fr. 35.–/S 432,–. Best.-Nr. IWT 205-X**


Dieses Buch beschreibt den Leistungsumfang von FORTRAN-80 für Personalcomputer, wie es im Release 3.44 von MicroSoft festgelegt wurde. Alle Sprachelemente sind in detaillierter Form abgehandelt und in Beispielen dargestellt. Das Buch kann in dieser Form als Programmierhandbuch und auch als Nachschlagewerk genutzt werden.

1984. 360 Seiten.
**Spiralh. DM 56,–/Fr. 56.–/S 498,–**
**ISBN 3-88322-079-5**


Dieses Buch ermöglicht die schnelle Einarbeitung in die Programmiersprache CBasic. Alle Eigenschaften werden mit Beispielen erklärt. Syntaxdiagramme zeigen grafisch die Einsatzmöglichkeiten. Die Funktionen des Compilers, des Linkers und des Bibliotheksprogrammes LIB werden erläutert.

1983. 190 Seiten. **Sprialh. DM 56,–/Fr. 56.–/S 498,–**
**ISBN 3-88322-034-5**


Teil 1 gibt eine Einführung in die Grundlagen: Sprachinterpreter und Compiler werden erläutert. Teil 2 enthält eine umfassende Beschreibung aller Anweisungen, Befehle und Funktionen, abgerundet mit zahlreichen Beispielen. Teil 3 enthält eine Zusammenstellung aller Befehle mit ihrer Syntax, weitere Beispiele und Tabellen.

In Vorb. April 1984. Ca. 300 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 58,–/ca. Fr. 58.–/ca. S 522,–.**
**ISBN 3-88322-073-6**


Das Buch ist in drei Teile gegliedert: Teil 1 führt in die Eigenschaften von Computern und CP/M im besonderen ein. Aufbauend auf diesen Kenntnissen werden im 2. Teil die zentralen CP/M-Hilfsprogramme vorgestellt. Der 3. Teil geht – nach einer Einführung in die Funktionsweise des 8080-Prozessors – auf die CP/M-Systembesonderheiten ein.

1982. 386 S. Mit zahlr. prakt. Beispielen
**Geb. DM 48,–/Fr. 48.–/S. 432,–**
**ISBN 3-88322-004-3**


Die Programmiersprache ›C‹ ist besonders zur Erstellung schneller, maschinennaher Programme geeignet, weist jedoch gegenüber der Assemblerprogrammierung wesentliche Vorteile auf, wie z. B. lokale und globale Variable, Prozeduren, Funktionen usw. Diese Einführung setzt beim Leser keine umfassenden Kenntnisse voraus.

In Vorb. 1984. Ca. 250 Seiten.
**Geb. ca. DM 56,–/ca. Fr. 56.–/ca. S 498,–**
**ISBN 3-88322-041-8**


Buch von Anwendern für Laien, auch als Einstieg in die Computerei geeignet. Inhalt: Geschichte der PC, Grundlagen, Arbeiten mit Disketten und Festplatten, Dateien, Überblick über MSDOS II.O, das Arbeiten mit dem Standard-Hilfsprogramm, Tips und Tricks.

In Vorb. Juni 1984. Ca. 260 Seiten. **Geb. Ca. DM 58,–/ca. Fr. 58.–/ca. S 522,–**
**ISBN 3-88322-072-8**


Dieses Buch führt Sie zur sicheren Handhabung der Tabellenkalkulation. Zahlreiche Anwendungen mit ausführlicher Beschreibung schließen sich an. Unter anderem: Werbeplanung, Reisekosten, Kapazitätsauslastung, Baufinanzierung, Reaktionszeiten.– Auch für die englische Version nutzbar.

In Vorb. Juni 1984. Ca. 250 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 56,–/ca. Fr. 56.–/ca. S 498,–**
**ISBN 3-88322-074-4**


Dieses Buch wendet sich an SuperCalc-Anwender: Anfänger führt es schnell zur sicheren Handhabung, Fortgeschrittene finden ausgereifte Anwendungen. Beispiele mit ausführlicher Beschreibung machen das Buch auch für VisiCalc-Anwender interessant. Die Unterschiede zwischen VisiCalc und SuperCalc sind in einem Kapitel dargestellt.

1984. 248 Seiten. **Spiralh. DM 56,–/ Fr. 56.–/S 498,–**
**ISBN 3-88322-040-X**


Die Verbindung von Kalkulation, Grafik und Datenbank verhalf Lotus zu schnellem Erfolg. In diesem Buch erlernen Sie zunächst die sichere Nutzung von Kalkulation und Grafik. Zahlreiche Beispiele zeigen die Leistungsfähigkeit von 1-2-3: Umsatzprognose, Investitionsrechnung, Tilgungsplan, Private Ausgaben u.a.

1984. Ca. 250 Seiten. **Geb. Ca. DM 58,–/ ca. Fr. 58.–/ca. S 522,–**
**ISBN 3-88322-085-X**


Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen: Mehrregister-Arithmetik – Zahlentheorie – Kombinatorik – Algebra – Geometrie – numerische Mathematik. Neu ist die Langzahl-Arithmetik. Sie gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen.

In Vorb. Juni 1984. 250 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 48,–/ca. Fr. 48.–/ca. S 432,–**
**ISBN 3-88322-077-9**


Eine Hilfestellung für wirtschaftliche Entscheidungen sind Programmsammlungen, die die guten Grafik- und Farbmöglichkeiten des Computers nutzen. Diagramme, Sprites, optische Darstellungen von Simulationen werden eingesetzt, die die Ergebnisse verdeutlichen. Die finanzmathematischen Grundlagen sind zu jedem Programm beschrieben.

In Vorb. Juni 1984. Ca. 200 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 48,–/ca. Fr. 48.–/ca. S 432,–**
**ISBN 3-88322-076-0**


Programme reichen von stöchiometrischen Berechnungen bis zur Elementedatei. Besonders genutzt werden die grafischen Möglichkeiten. Die Anwendungsbeispiele gehen von Strukturformeln, grafischen Darstellungen von Versuchsanordnungen und Funktionen bis zur 3-D Grafik im Detail.

In Vorb. Aug. 1984. Ca. 220 Seiten. **Spiralh. Ca. DM 56,–/ca. Fr. 56.–/ca. S 498,–**
**ISBN 3-88322-078-7**

G. Daubach, D. Herrmann

# Mathematik auf dem Apple II, //e, 2c

Dieses Buch enthält 40 mathematische Programme aus den Bereichen:
— Mehr-Register-Arithmetik — Zahlentheorie — Kombinatorik — Algebra — Geometrie — Numerische Mathematik.

Die hier neu vorgelegte Langzahl-Arithmetik gestattet die Grundrechenarten für Zahlen bis 255 Stellen. Zahlreiche Anwendungen finden auch die angegebenen kombinatorischen Prozeduren.

Sie finden auch das Rechnen mit Polynomen, Matrizen und komplexen Zahlen: Neben dem komplexen Hornerschema werden insbesonder Algorithmen zur Polynomdivision und Matrizeninversion gegeben.

Anwendungsbezogen sind die Programme der Numerischen Mathematik. Hier werden Verfahren zur Lösung von linearen und nichtlinearen Gleichungen gegeben, zum Eigenwertproblem von Matrizen und zur numerischen Integration und Differentiation.
Programme auf Diskette erhältlich.

ISBN 3-88322-036-1